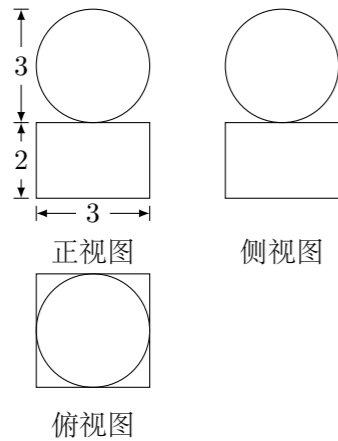


## 2011 普通高等学校招生考试 (湖南卷文)

### 一、选择题

1. 设全集  $U = M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $M \cap \complement_U N = \{2, 4\}$ , 则  $N =$  ( )  
 (A)  $\{1, 2, 3\}$  (B)  $\{1, 3, 5\}$  (C)  $\{1, 4, 5\}$  (D)  $\{2, 3, 4\}$
2. 若  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $i$  为虚数单位, 且  $(a+i)i = b+i$ , 则 ( )  
 (A)  $a = 1, b = 1$  (B)  $a = -1, b = 1$   
 (C)  $a = 1, b = -1$  (D)  $a = -1, b = -1$
3. “ $x > 1$ ”是“ $|x| > 1$ ”的 ( )  
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件
4. 如图是某几何体的三视图, 则该几何体的体积为 ( )



- (A)  $9\pi + 42$  (B)  $36\pi + 18$  (C)  $\frac{9}{2}\pi + 12$  (D)  $\frac{9}{2}\pi + 18$

5. 通过随机询问 110 名性别不同的大学生是否爱好某项运动, 得到如下的列联表:

|     |    |    |     |
|-----|----|----|-----|
|     | 男  | 女  | 总计  |
| 爱好  | 40 | 20 | 60  |
| 不爱好 | 20 | 30 | 50  |
| 总计  | 60 | 50 | 110 |

由  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$  算得,  
 $K^2 = \frac{110 \times (40 \times 30 - 20 \times 20)^2}{60 \times 50 \times 60 \times 50} \approx 7.8.$

附表:

|                 |       |       |        |
|-----------------|-------|-------|--------|
| $P(K^2 \geq k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001  |
| $k$             | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

参照附表, 得到的正确结论是 ( )

- (A) 有 99% 以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”  
 (B) 有 99% 以上的把握认为“爱好该项运动与性别无关”

(C) 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为“爱好该项运动与性别有关”

(D) 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为“爱好该项运动与性别无关”

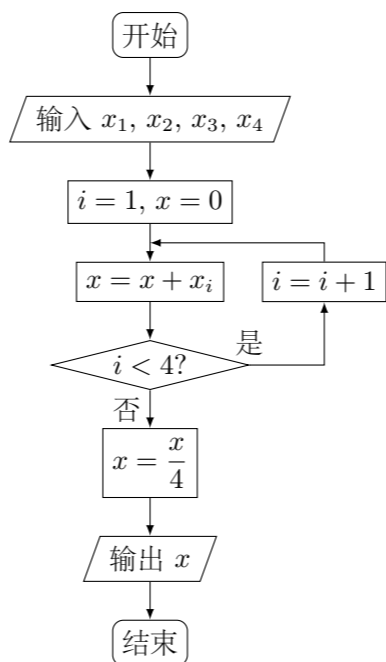
6. 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$  ( $a > 0$ ) 的渐近线方程为  $3x \pm 2y = 0$ , 则  $a$  的值为 ( )  
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
7. 曲线  $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} - \frac{1}{2}$  在点  $M(\frac{\pi}{4}, 0)$  处的切线的斜率为 ( )  
 (A)  $-\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
8. 已知函数  $f(x) = e^x - 1$ ,  $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ , 若有  $f(a) = g(b)$ , 则  $b$  的取值范围为 ( )  
 (A)  $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$  (B)  $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$   
 (C)  $[1, 3]$  (D)  $(1, 3)$

### 二、填空题

9. 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha, \\ y = \sqrt{3} \sin \alpha, \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数), 在极坐标系 (与直角坐标系  $xOy$  取相同的长度单位, 且以原点  $O$  为极点, 以  $x$  轴正半轴为极轴) 中, 曲线  $C_2$  的方程为  $\rho(\cos \theta - \sin \theta) + 1 = 0$ , 则  $C_1$  与  $C_2$  的交点个数为\_\_\_\_\_.

10. 已知某试验范围为  $[10, 90]$ , 若用分数法进行 4 次优选试验, 则第二次试点可以是\_\_\_\_\_.

11. 若执行如图所示的框图, 输入  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 8$ , 则输出的数等于\_\_\_\_\_.



12. 已知  $f(x)$  为奇函数,  $g(x) = f(x) + 9$ ,  $g(-2) = 3$ , 则  $f(2) =$ \_\_\_\_\_.

13. 设向量  $a, b$  满足  $|a| = 2\sqrt{5}$ ,  $b = (2, 1)$ , 且  $a$  与  $b$  的方向相反, 则  $a$  的坐标为\_\_\_\_\_.

14. 设  $m > 1$ , 在约束条件  $\begin{cases} y \geq x, \\ y \leq mx, \\ x + y \leq 1 \end{cases}$  下, 目标函数  $z = x + 5y$  的最大值为 4, 则  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

15. 已知圆  $C: x^2 + y^2 = 12$ , 直线  $l: 4x + 3y = 25$ .

- (1) 圆  $C$  的圆心到直线  $l$  的距离为\_\_\_\_\_;  
 (2) 圆  $C$  上任意一点  $A$  到直线  $l$  的距离小于 2 的概率为\_\_\_\_\_.

16. 给定  $k \in \mathbf{N}^*$ , 设函数  $f: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$  满足: 对于任意大于  $k$  的正整数  $n$ ,  $f(n) = n - k$ .

- (1) 设  $k = 1$ , 则其中一个函数  $f$  在  $n = 1$  处的函数值为\_\_\_\_\_;  
 (2) 设  $k = 4$ , 且当  $n \leq 4$  时,  $2 \leq f(n) \leq 3$ , 则不同的函数  $f$  的个数为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且满足  $c \sin A = a \cos C$ .

- (1) 求角  $C$  的大小;  
 (2) 求  $\sqrt{3} \sin A - \cos(B + \frac{\pi}{4})$  的最大值, 并求取得最大值时角  $A, B$  的大小.

18. 某河流上的一座水力发电站, 每年六月份的发电量  $Y$  (单位: 万千瓦时) 与该河上游在六月份的降雨量  $X$  (单位: 毫米) 有关, 据统计, 当  $X = 70$  时,  $Y = 460$ ;  $X$  每增加 10,  $Y$  增加 5. 已知近 20 年  $X$  的值为: 140, 110, 160, 70, 200, 160, 140, 160, 220, 200, 110, 160, 160, 200, 140, 110, 160, 220, 140, 160.

(1) 完成如下的频率分布表:

近 20 年六月份降雨量频率分布表

|     |                |     |                |     |     |                |
|-----|----------------|-----|----------------|-----|-----|----------------|
| 降雨量 | 70             | 110 | 140            | 160 | 200 | 220            |
| 频率  | $\frac{1}{20}$ |     | $\frac{4}{20}$ |     |     | $\frac{2}{20}$ |

(2) 假定今年六月份的降雨量与近 20 年六月份降雨量的分布规律相同, 并将频率视为概率, 求今年六月份该水力发电站的发电量低于 490 (万千瓦时) 或超过 530 (万千瓦时) 的概率.

20. 某企业第 1 年初购买一台价值为 120 万元的设备  $M$ ,  $M$  的价值在使用过程中逐年减少. 从第 2 年到第 6 年, 每年初  $M$  的价值比上年初减少 10 万元; 从第 7 年开始, 每年初  $M$  的价值为上年初的 75%.

(1) 求第  $n$  年初  $M$  的价值  $a_n$  的表达式;

(2) 设  $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ , 若  $A_n$  大于 80 万元, 则  $M$  继续使用, 否则须在第  $n$  年初对  $M$  更新. 证明: 须在第 9 年初对  $M$  更新.

22. 设函数  $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x$  ( $a \in \mathbf{R}$ ).

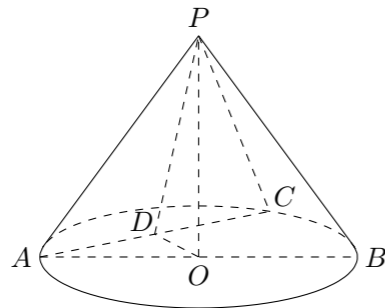
(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性.

(2) 若  $f(x)$  有两个极值点  $x_1$  和  $x_2$ , 记过点  $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$  的直线斜率为  $k$ . 问: 是否存在  $a$ , 使得  $k = 2 - a$ ? 若存在, 求出  $a$  的值; 若不存在, 请说明理由.

19. 如图, 在圆锥  $PO$  中, 已知  $PO = \sqrt{2}$ ,  $\odot O$  的直径  $AB = 2$ , 点  $C$  在  $\widehat{AB}$  上, 且  $\angle CAB = 30^\circ$ ,  $D$  为  $AC$  的中点.

(1) 证明:  $AC \perp$  平面  $POD$ ;

(2) 求直线  $OC$  和平面  $PAC$  所成角的正弦值.



21. 已知平面内一动点  $P$  到点  $F(1, 0)$  的距离与点  $P$  到  $y$  轴的距离的差等于 1.

(1) 求动点  $P$  的轨迹  $C$  的方程;

(2) 过点  $F$  作两条斜率存在且互相垂直的直线  $l_1, l_2$ , 设  $l_1$  与轨迹  $C$  相交于点  $A, B$ ,  $l_2$  与轨迹  $C$  相交于点  $D, E$ , 求  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB}$  的最小值.