2011 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

一、选择题

1. 若 $a, b\in \mathbf{R}$, i 为虚数单位, 且 $(a+\mathrm{i})\,\mathrm{i}=b+\mathrm{i}$, 则 ( )

(A) $a=1, b=1$　(B) $a=-1, b=1$

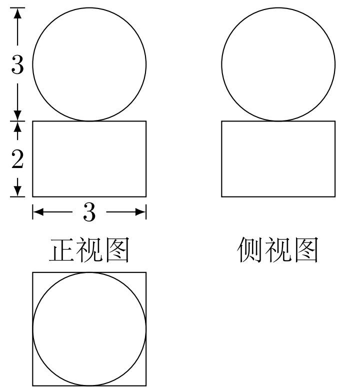
(C) $a=-1, b=-1$　(D) $a=1, b=-1$

2. 设 $M=\{1,\ 2\}$, $N=\{a^2\}$, 则"$a=1$"是"$N\subseteq M$"的 ( )

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分又不必要条件

3. 如图是某几何体的三视图, 则该几何体的体积为 ( )



正视图　侧视图

俯视图

(A) $\dfrac{9}{2}\pi+12$　(B) $\dfrac{9}{2}\pi+18$　(C) $9\pi+42$　(D) $36\pi+18$

4. 通过随机询问 110 名性别不同的大学生是否爱好某项运动, 得到如下的列联表:

	男	女	总计
爱好	40	20	60
不爱好	20	30	50
总计	60	50	110

由 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 算得,

$K^2=\dfrac{110\times(40\times30-20\times20)^2}{60\times50\times60\times50}\approx7.8.$

附表:

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

参照附表, 得到的正确结论是 ( )

(A) 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为"爱好该项运动与性别有关"

(B) 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为"爱好该项运动与性别无关"

(C) 有 99% 以上的把握认为"爱好该项运动与性别有关"

(D) 有 99% 以上的把握认为"爱好该项运动与性别无关"

5. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1\ (a>0)$ 的渐近线方程为 $3x\pm2y=0$, 则 a 的值为 ( )

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

6. 由直线 $x=-\dfrac{\pi}{3}$, $x=\dfrac{\pi}{3}$, $y=0$ 与曲线 $y=\cos x$ 所围成的封闭图形的面积为 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 1　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $\sqrt{3}$

7. 设 $m>1$, 在约束条件 $\begin{cases}y\geqslant x,\\ y\leqslant mx,\\ x+y\leqslant1\end{cases}$ 下, 目标函数 $z=x+my$ 的最大值小于 2, 则 m 的取值范围为 ( )

(A) $\left(1, 1+\sqrt{2}\right)$　(B) $\left(1+\sqrt{2}, +\infty\right)$

(C) $(1, 3)$　(D) $(3, +\infty)$

8. 设直线 $x=t$ 与函数 $f(x)=x^2$, $g(x)=\ln x$ 的图象分别交于点 M, N, 则当 $|MN|$ 达到最小时 t 的值为 ( )

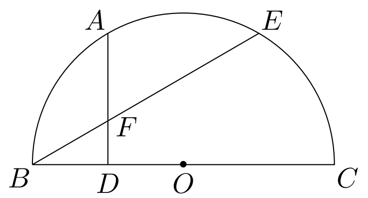
(A) 1　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

9. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=1+\sin\alpha,\end{cases}$ (α 为参数), 在极坐标系 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 曲线 C_2 的方程为 $\rho(\cos\theta-\sin\theta)+1=0$, 则 C_1 与 C_2 的交点个数为______.

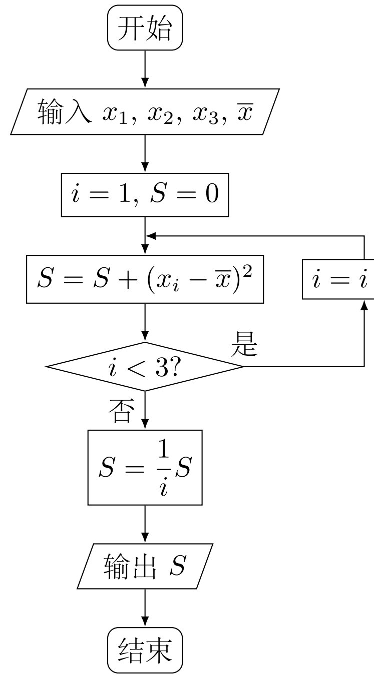
10. 设 $x, y\in\mathbf{R}$, 且 $xy\neq0$, 则 $\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+4y^2\right)$ 的最小值为______.

11. 如图, A、E 是半圆周上的两个三等分点, 直径 $BC=4$, $AD\perp BC$, 垂足为 D, BE 与 AD 相交于点 F, 则 AF 的长为______.



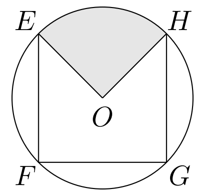
12. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和, 且 $a_1=1$, $a_4=7$, 则 $S_5=$______.

13. 若执行如图所示的框图, 输入 $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $\overline{x}=2$, 则输出的数等于______.



14. 在边长为 1 的正三角形 ABC 中, 设 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CE}$, 则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=$______.

15. 如图所示, $EFGH$ 是以 O 为圆心, 半径为 1 的圆的内接正方形, 将一颗豆子随机地扔到该圆内, 用 A 表示事件"豆子落在正方形 $EFGH$ 内", B 表示事件"豆子落在扇形 OHE (阴影部分) 内", 则 (1) $P(A)=$______; (2) $P(B|A)=$______.



16. 对于 $n\in\mathbf{N}^*$, 将 n 表示为 $n=a_0\times2^k+a_1\times2^{k-1}+a_2\times2^{k-2}+\cdots+a_{k-1}\times2^1+a_k\times2^0$. 当 $i=0$ 时, $a_i=1$, 当 $1\leqslant i\leqslant k$ 时, a_i 为 0 或 1. 记 $I(n)$ 为上述表示中 a_i 为 0 的个数 (例如: $1=1\times2^0$, $4=1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$, 则 $I(1)=0$, $I(4)=2$), 则 (1) $I(12)=$______; (2) $\sum\limits_{n=1}^{127}2^{I(n)}=$______.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 且满足 $c\sin A=a\cos C$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 求 $\sqrt{3}\sin A-\cos\left(B+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最大值, 并求取得最大值时角 A, B 的大小.

18. 某商店试销某种商品 20 天, 获得如下数据:

日销售量 (件)	0	1	2	3
频数	1	5	9	5

试销结束后 (假设该商品的日销售量的分布规律不变), 设某天开始营业时有该商品 3 件, 当天营业结束后检查存货, 若发现存货少于 2 件, 则当天进货补充至 3 件, 否则不进货, 将频率视为概率.

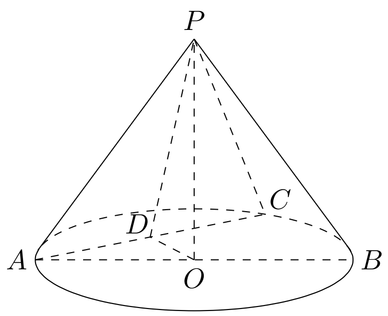
(1) 求当天商品不进货的概率;

(2) 记 X 为第二天开始营业时该商品的件数, 求 X 的分布列和数学期望.

19. 如图, 在圆锥 PO 中, 已知 $PO=\sqrt{2}$, $\odot O$ 的直径 $AB=2$, C 是 $\widehat{AB}$ 的中点, D 为 AC 的中点.

(1) 证明: 平面 $POD\perp$ 平面 PAC;

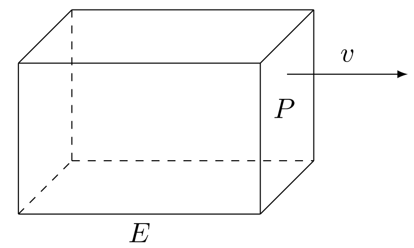
(2) 求二面角 $B-PA-C$ 的余弦值.



20. 如图, 长方体物体 E 在雨中沿面 P (面积为 S) 的垂直方向作匀速移动, 速度为 v $(v>0)$, 雨速沿 E 移动方向的分速度为 c $(c\in\mathbf{R})$. E 移动时单位时间内的淋雨量包括两部分: ① P 或 P 的平行面 (只有一个面淋雨) 的淋雨量, 假设其值与 $|v-c|\times S$ 成正比, 比例系数为 $\dfrac{1}{10}$; ② 其它面的淋雨量之和, 其值为 $\dfrac{1}{2}$, 记 y 为 E 移动过程中的总淋雨量, 当移动距离 $d=100$, 面积 $S=\dfrac{3}{2}$ 时.

(1) 写出 y 的表达式;

(2) 设 $0<v\leqslant 10$, $0<c\leqslant 5$, 试根据 c 的不同取值范围, 确定移动速度 v, 使总淋雨量 y 最少.



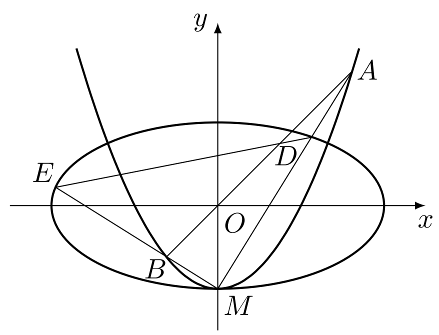
21. 如图, 椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, x 轴被曲线 C_2: $y=x^2-b$ 截得的线段长等于 C_1 的长半轴长.

(1) 求 C_1, C_2 的方程;

(2) 设 C_2 与 y 轴的交点为 M, 过坐标原点 O 的直线 l 与 C_2 相交于点 A, B, 直线 MA, MB 分别与 C_1 相交与点 D, E.

① 证明: $MD\perp ME$;

② 记 $\triangle MAB$, $\triangle MDE$ 的面积分别是 S_1, S_2. 问: 是否存在直线 l, 使得 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{17}{32}$? 请说明理由.



22. 已知函数 $f(x)=x^3$, $g(x)=x+\sqrt{x}$.

(1) 求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的零点个数, 并说明理由;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足 $a_1=a$ $(a>0)$, $f(a_{n+1})=g(a_n)$, 证明: 存在常数 M, 使得对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有 $a_n\leqslant M$.