

## 2011 普通高等学校招生考试 (福建卷理)

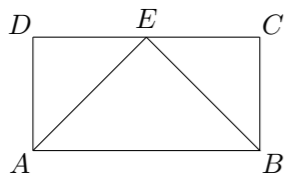
### 一、选择题

1.  $i$  是虚数单位, 若集合  $S = \{-1, 0, 1\}$ , 则 ( )  
 (A)  $i \in S$  (B)  $i^2 \in S$  (C)  $i^3 \in S$  (D)  $\frac{2}{i} \in S$

2. 若  $a \in \mathbf{R}$ , 则“ $a = 2$ ”是“ $(a-1)(a-2) = 0$ ”的 ( )  
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 若  $\tan \alpha = 3$ , 则  $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$  的值等于 ( )  
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

4. 如图, 矩形  $ABCD$  中, 点  $E$  为边  $CD$  的中点, 若在矩形  $ABCD$  内部随机取一个点  $Q$ , 则点  $Q$  取自  $\triangle ABE$  内部的概率等于 ( )



(A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{2}{3}$

5.  $\int_0^1 (e^x + 2x) dx$  等于 ( )  
 (A) 1 (B)  $e - 1$  (C)  $e$  (D)  $e + 1$

6.  $(1 + 2x)^5$  的展开式中,  $x^2$  的系数等于 ( )  
 (A) 80 (B) 40 (C) 20 (D) 10

7. 设圆锥曲线  $\Gamma$  的两个焦点分别为  $F_1, F_2$ . 若曲线  $\Gamma$  上存在点  $P$  满足  $|PF_1| : |F_1F_2| : |PF_2| = 4 : 3 : 2$ , 则曲线  $\Gamma$  的离心率等于 ( )  
 (A)  $\frac{1}{2}$  或  $\frac{3}{2}$  (B)  $\frac{2}{3}$  或 2 (C)  $\frac{1}{2}$  或 2 (D)  $\frac{2}{3}$  或  $\frac{3}{2}$

8. 已知  $O$  是坐标原点, 点  $A(-1, 1)$ , 若点  $M(x, y)$  为平面区域  $\begin{cases} x + y \geq 2, \\ x \leq 1, \\ y \leq 2, \end{cases}$  上的一个动点, 则  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$  的取值范围是 ( )  
 (A)  $[-1, 0]$  (B)  $[0, 1]$  (C)  $[0, 2]$  (D)  $[-1, 2]$

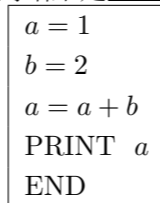
9. 对于函数  $f(x) = a \sin x + bx + c$  (其中  $a, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{Z}$ ), 选取  $a, b, c$  的一组值计算  $f(1)$  和  $f(-1)$ , 所得出的正确结果一定不可能是 ( )  
 (A) 4 和 6 (B) 3 和 1 (C) 2 和 4 (D) 1 和 2

10. 已知函数  $f(x) = e^x + x$ , 对于曲线  $y = f(x)$  上横坐标成等差数列的三个点  $A, B, C$ , 给出以下判断:  
 ①  $\triangle ABC$  一定是钝角三角形  
 ②  $\triangle ABC$  可能是直角三角形  
 ③  $\triangle ABC$  可能是等腰三角形  
 ④  $\triangle ABC$  不可能是等腰三角形  
 其中, 正确的判断是 ( )

(A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

### 二、填空题

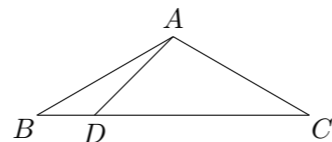
11. 运行如图所示的程序, 输出的结果是\_\_\_\_\_.



12. 三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA \perp$  底面  $ABC$ ,  $PA = 3$ , 底面  $ABC$  是边长为 2 的正三角形, 则三棱锥  $P-ABC$  的体积等于\_\_\_\_\_.

13. 盒中装有形状、大小完全相同的 5 个球, 其中红色球 3 个, 黄色球 2 个. 若从中随机取出 2 个球, 则所取出的 2 个球颜色不同的概率等于\_\_\_\_\_.

14. 如图,  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC = 2$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ , 点  $D$  在  $BC$  边上,  $\angle ADC = 45^\circ$ , 则  $AD$  的长度等于\_\_\_\_\_.



15. 设  $V$  是全体平面向量构成的集合, 若映射  $f: V \rightarrow \mathbf{R}$  满足: 对任意向量  $\mathbf{a} = (x_1, y_1) \in V$ ,  $\mathbf{b} = (x_2, y_2) \in V$ , 以及任意  $\lambda \in \mathbf{R}$ , 均有  $f(\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}) = \lambda f(\mathbf{a}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{b})$ , 则称映射  $f$  具有性质  $P$ . 现给出如下映射:

- ①  $f_1: V \rightarrow \mathbf{R}, f_1(\mathbf{m}) = x - y, \mathbf{m} = (x, y) \in V$ ;
- ②  $f_2: V \rightarrow \mathbf{R}, f_2(\mathbf{m}) = x^2 + y, \mathbf{m} = (x, y) \in V$ ;
- ③  $f_3: V \rightarrow \mathbf{R}, f_3(\mathbf{m}) = x + y + 1, \mathbf{m} = (x, y) \in V$ .

其中, 具有性质  $P$  的映射的序号为\_\_\_\_\_. (写出所有具有性质  $P$  的映射的序号)

### 三、解答题

16. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比  $q = 3$ , 前 3 项和  $S_3 = \frac{13}{3}$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 若函数  $f(x) = A \sin(2x + \varphi)$  ( $A > 0, 0 < \varphi < \pi$ ) 在  $x = \frac{\pi}{6}$  处取得最大值, 且最大值为  $a_3$ , 求函数  $f(x)$  的解析式.

17. 已知直线  $l: y = x + m, m \in \mathbf{R}$ .

- (1) 若以点  $M(2, 0)$  为圆心的圆与直线  $l$  相切于点  $P$ , 且点  $P$  在  $y$  轴上, 求该圆的方程;
- (2) 若直线  $l$  关于  $x$  轴对称的直线为  $l'$ , 问直线  $l'$  与抛物线  $C: x^2 = 4y$  是否相切? 说明理由.

18. 某商场销售某种商品的经验表明, 该商品每日的销售量  $y$  (单位: 千克) 与销售价格  $x$  (单位: 元/千克) 满足关系式  $y = \frac{a}{x-3} + 10(x-6)^2$ , 其中  $3 < x < 6, a$  为常数. 已知销售价格为 5 元/千克时, 每日可售出该商品 11 千克.

- (1) 求  $a$  的值;
- (2) 若该商品的成本为 3 元/千克, 试确定销售价格  $x$  的值, 使商场每日销售该商品所获得的利润最大.

19. 某产品按行业生产标准分成 8 个等级, 等级系数  $X$  依次为 1, 2,  $\dots$ , 8, 其中  $X \geq 5$  为标准 A,  $X \geq 3$  为标准 B, 已知甲厂执行标准 A 生产该产品, 产品的零售价为 6 元/件; 乙厂执行标准 B 生产该产品, 产品的零售价为 4 元/件, 假定甲、乙两厂的产品都符合相应的执行标准.

(1) 已知甲厂产品的等级系数  $X_1$  的概率分布列如下表所示:

$X_1$	5	6	7	8
$P$	0.4	$a$	$b$	0.1

且  $X_1$  的数学期望  $EX_1 = 6$ , 求  $a, b$  的值;

(2) 为分析乙厂产品的等级系数  $X_2$ , 从该厂生产的产品中随机抽取 30 件, 相应的等级系数组成一个样本, 数据如下:

3 5 3 3 8 5 5 6 3 4  
6 3 4 7 5 3 4 8 5 3  
8 3 4 3 4 4 7 5 6 7

用这个样本的频率分布估计总体分布, 将频率视为概率, 求等级系数  $X_2$  的数学期望;

(3) 在 (1)、(2) 的条件下, 若以“性价比”为判断标准, 则哪个工厂的产品更具可购买性? 说明理由.

注: ① 产品的“性价比” =  $\frac{\text{产品的等级系数的数学期望}}{\text{产品的零售价}}$ ;

② “性价比”大的产品更具可购买性.

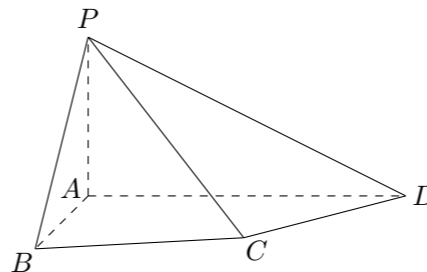
20. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ , 四边形  $ABCD$  中,  $AB \perp AD$ ,  $AB + AD = 4$ ,  $CD = \sqrt{2}$ ,  $\angle CDA = 45^\circ$ .

(1) 求证: 平面  $PAB \perp$  平面  $PAD$ ;

(2) 设  $AB = AP$ .

① 若直线  $PB$  与平面  $PCD$  所成的角为  $30^\circ$ , 求线段  $AB$  的长;

② 在线段  $AD$  上是否存在一个点  $G$ , 使得点  $G$  到点  $P, B, C, D$  的距离都相等? 说明理由.



21. 三选二.

【A】设矩阵  $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ . (其中  $a > 0, b > 0$ )

(1) 若  $a = 2, b = 3$ , 求矩阵  $M$  的逆矩阵  $M^{-1}$ ;

(2) 若曲线  $C: x^2 + y^2 = 1$  在矩阵  $M$  所对应的线性变换作用下得到曲线  $C': \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 求  $a, b$  的值.

【B】在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的方程为  $x - y + 4 = 0$ , 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \alpha, \\ y = \sin \alpha, \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数).

(1) 已知在极坐标 (与直角坐标系  $xOy$  取相同的长度单位, 且以原点  $O$  为极点, 以  $x$  轴正半轴为极轴) 中, 点  $P$  的极坐标为  $(4, \frac{\pi}{2})$ , 判断点  $P$  与直线  $l$  的位置关系;

(2) 设点  $Q$  是曲线  $C$  上的一个动点, 求它到直线  $l$  的距离的最小值.

【C】设不等式  $|2x - 1| < 1$  的解集为  $M$ .

(1) 求集合  $M$ ;

(2) 若  $a, b \in M$ , 试比较  $ab + 1$  与  $a + b$  的大小.