# 2011 普通高等学校招生考试 (辽宁卷理)

## 一、选择题

1. 若 $a$ 为正实数, i 为虚数单位, $\left|\dfrac{a+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|=2$, 则 $a=$ ( )

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 1

2. 已知 $M$, $N$ 为集合 $I$ 的非空真子集, 且 $M$, $N$ 不相等, 若 $N\cap \complement_I M=\varnothing$, 则 $M\cup N=$ ( )

(A) $M$　(B) $N$　(C) $I$　(D) $\varnothing$

3. 已知 $F$ 是抛物线 $y^2=x$ 的焦点, $A$, $B$ 是该抛物线上的两点, $|AF|+|BF|=3$, 则线段 $AB$ 的中点到 $y$ 轴的距离为 ( )

(A) $\dfrac{3}{4}$　(B) 1　(C) $\dfrac{5}{4}$　(D) $\dfrac{7}{4}$

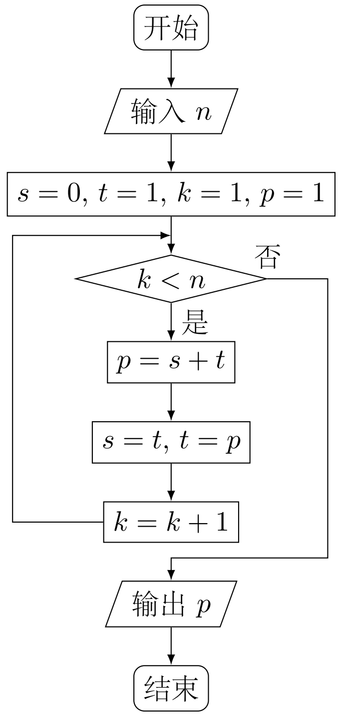
4. $\triangle ABC$ 的三个内角 $A$、$B$、$C$ 所对的边分别为 $a$、$b$、$c$, 并且有 $a\sin A\sin B+b\cos^2 A=\sqrt{2}a$, 则 $\dfrac{b}{a}=$ ( )

(A) $2\sqrt{3}$　(B) $2\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) $\sqrt{2}$

5. 从 1, 2, 3, 4, 5 中任取 2 个不同的数, 事件 $A=$“取到的 2 个数之和为偶数”, 事件 $B=$“取到的 2 个数均为偶数”, 则 $P(B\mid A)=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{8}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{2}{5}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

6. 执行下面的程序框图, 如果输入的 $n$ 是 4, 则输出的 $p$ 是 ( )

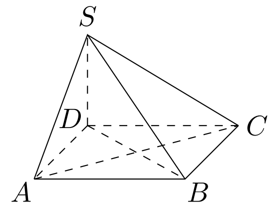



(A) 8　(B) 5　(C) 3　(D) 2

7. 设 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=\dfrac{1}{3}$, 则 $\sin 2\theta=$ ( )

(A) $-\dfrac{7}{9}$　(B) $-\dfrac{1}{9}$　(C) $\dfrac{1}{9}$　(D) $\dfrac{7}{9}$

8. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面为正方形, $SD\perp$ 底面 $ABCD$, 则下列结论中不正确的是 ( )




(A) $AC\perp SB$

(B) $AB\parallel$ 平面 $SCD$

(C) $SA$ 与平面 $SBD$ 所成的角等于 $SC$ 与平面 $SBD$ 所成的角

(D) $AB$ 与 $SC$ 所成的角等于 $DC$ 与 $SA$ 所成的角

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{1-x}, & x\leqslant 1,\\ 1-\log_2 x, & x>1,\end{cases}$ 则满足 $f(x)\leqslant 2$ 的 $x$ 取值范围是 ( )

(A) $[-1,2]$　(B) $[0,2]$　(C) $[1,+\infty)$　(D) $[0,+\infty)$

10. 若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 均为单位向量, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\leqslant 0$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$ 的最大值为 ( )

(A) $\sqrt{2}-1$　(B) 1　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

11. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-1)=2$, 对任意 $x\in\mathbf{R}$, $f'(x)>2$, 则 $f(x)>2x+4$ 的解集为 ( )

(A) $(-1,1)$　(B) $(-1,+\infty)$　(C) $(-\infty,-1)$　(D) $(-\infty,+\infty)$

12. 已知球的直径 $SC=4$, $A$, $B$ 是该球球面上的两点, $AB=\sqrt{3}$, $\angle ASC=\angle BSC=30^\circ$, 则棱锥 $S-ABC$ 的体积为 ( )

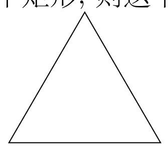
(A) $3\sqrt{3}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 1

## 二、填空题

13. 已知点 $(2,3)$ 在双曲线 $C$: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 上, $C$ 的焦距为 4, 则它的离心率为______.

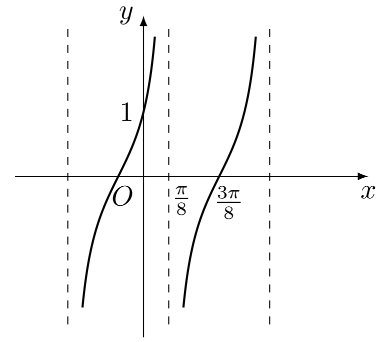
14. 调查了某地若干户家庭的年收入 $x$ (单位: 万元) 和年饮食支出 $y$ (单位: 万元), 调查显示年收入 $x$ 与年饮食支出 $y$ 具有线性相关关系, 并由调查数据得到 $y$ 对 $x$ 的回归直线方程: $\hat{y}=0.254x+0.321$. 由回归直线方程可知, 家庭收入每增加 1 万元, 年饮食支出平均增加______万元.

15. 一个正三棱柱的侧棱长和底面边长相等, 体积为 $2\sqrt{3}$, 它的三视图中的俯视图如图所示, 左视图是一个矩形, 则这个矩形的面积是______.



俯视图

16. 已知函数 $f(x)=A\tan(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y=f(x)$ 的部分图象如图, 则 $f\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=$______.




## 三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=0$, $a_6+a_8=-10$.

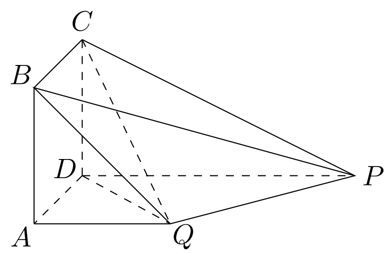
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$ 的前 $n$ 项和.

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $PD\perp$ 平面 $ABCD$, $PD\parallel QA$, $QA=AB=\dfrac{1}{2}PD$.

(1) 证明: 平面 $PQC\perp$ 平面 $DCQ$;

(2) 求二面角 $Q-BP-C$ 的余弦值.



19. 某农场计划种植某种新作物，为此对这种作物的两个品种 (分别称为品种甲和品种乙) 进行田间试验，选取两大块地，每大块地分成 $n$ 小块地，在总共 $2n$ 小块地中，随机选 $n$ 小块地种植品种甲，另外 $n$ 小块地种植品种乙.

(1) 假设 $n=4$，在第一大块地中，种植品种甲的小块地的数目记为 $X$，求 $X$ 的分布列和数学期望;

(2) 试验时每大块地分成 8 小块，即 $n=8$，试验结束后得到品种甲和品种乙在各小块地上的每公顷产量 (单位: $\mathrm{kg/hm^2}$) 如下表:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 品种甲 | 403 | 397 | 390 | 404 | 388 | 400 | 412 | 406 |
| 品种乙 | 419 | 403 | 412 | 418 | 408 | 423 | 400 | 413 |

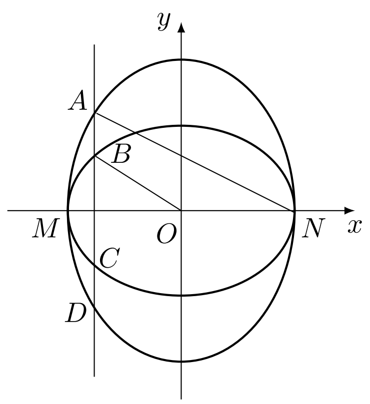
分别求品种甲和品种乙每公顷产量的样本平均数和样本方差; 根据试验结果，你应该种植哪一品种?

附: 样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的样本方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$，其中 $\overline{x}$ 为样本平均数.

20. 如图，已知椭圆 $C_1$ 的中心在原点 $O$，长轴左、右端点 $M, N$ 在 $x$ 轴上，椭圆 $C_2$ 的短轴为 $MN$，且 $C_1, C_2$ 的离心率都为 $e$. 直线 $l\perp MN$，$l$ 与 $C_1$ 交于两点，与 $C_2$ 交于两点，这四点按纵坐标从大到小依次为 $A, B, C, D$.

(1) 设 $e=\frac{1}{2}$，求 $|BC|$ 与 $|AD|$ 的比值;

(2) 当 $e$ 变化时，是否存在直线 $l$，使得 $BO\parallel AN$，并说明理由.




21. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+(2-a)x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a>0$，证明: 当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时，$f\left(\frac{1}{a}+x\right)>f\left(\frac{1}{a}-x\right)$;

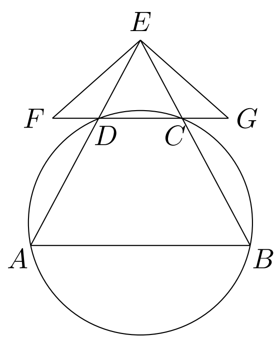
(3) 若函数 $y=f(x)$ 的图象与 $x$ 轴交于 $A, B$ 两点，线段 $AB$ 中点的横坐标为 $x_0$，证明: $f'(x_0)<0$.

22. 三选一.

【A】如图，$A, B, C, D$ 四点在同一圆上，$AD$ 的延长线与 $BC$ 的延长线交于 $E$ 点，且 $EC=ED$.

(1) 证明: $CD\parallel AB$;

(2) 延长 $CD$ 到 $F$，延长 $DC$ 到 $G$，使得 $EF=EG$，证明: $A, B, G, F$ 四点共圆.




【B】在平面直角坐标系 $xOy$ 中，曲线 $C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\varphi,\\ y=\sin\varphi,\end{cases}$ ($\varphi$ 为参数)，曲线 $C_2$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\varphi,\\ y=b\sin\varphi,\end{cases}$ ($a>b>0$，$\varphi$ 为参数). 在以 $O$ 为极点，$x$ 轴的正半轴为极轴的极坐标系中，射线 $l$: $\theta=\alpha$ 与 $C_1, C_2$ 各有一个交点，当 $\alpha=0$ 时，这两个交点间的距离为 2，当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，这两个交点重合.

(1) 分别说明 $C_1, C_2$ 是什么曲线，并求出 $a$ 与 $b$ 的值;

(2) 设当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，$l$ 与 $C_1, C_2$ 的交点分别为 $A_1, B_1$，当 $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ 时，$l$ 与 $C_1, C_2$ 的交点分别为 $A_2, B_2$，求四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 的面积.

【C】已知函数 $f(x)=|x-2|-|x-5|$.

(1) 证明: $-3\leqslant f(x)\leqslant 3$;

(2) 求不等式 $f(x)\geqslant x^2-8x+15$ 的解集.