

2011 普通高等学校招生考试 (重庆卷理)

一、选择题

1. 复数 $\frac{i^2 + i^3 + i^4}{1 - i} =$ ()
 (A) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ (B) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (C) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ (D) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
2. “ $x < -1$ ”是“ $x^2 - 1 > 0$ ”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x-1} + \frac{ax-1}{3x} \right) = 2$, 则 $a =$ ()
 (A) -6 (B) 2 (C) 3 (D) 6
4. $(1+3x)^n$ (其中 $n \in \mathbf{N}$ 且 $n \geq 6$) 的展开式中 x^5 与 x^6 的系数相等, 则 $n =$ ()
 (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9
5. 下列区间中, 函数 $f(x) = |\ln(2-x)|$ 在其上为增函数的是 ()
 (A) $(-\infty, 1]$ (B) $\left[-1, \frac{4}{3}\right]$ (C) $\left[0, \frac{3}{2}\right)$ (D) $[1, 2)$
6. 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边 a, b, c 满足 $(a+b)^2 - c^2 = 4$, 且 $C = 60^\circ$, 则 ab 的值为 ()
 (A) $\frac{4}{3}$ (B) $8 - 4\sqrt{3}$ (C) 1 (D) $\frac{2}{3}$
7. 已知 $a > 0, b > 0, a + b = 2$, 则 $y = \frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值是 ()
 (A) $\frac{7}{2}$ (B) 4 (C) $\frac{9}{2}$ (D) 5
8. 在圆 $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ 内, 过点 $E(0, 1)$ 的最长弦和最短弦分别为 AC 和 BD , 则四边形 $ABCD$ 的面积为 ()
 (A) $5\sqrt{2}$ (B) $10\sqrt{2}$ (C) $15\sqrt{2}$ (D) $20\sqrt{2}$
9. 高为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 的四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形, 点 S, A, B, C, D 均在半径为 1 的同一球面上, 则底面 $ABCD$ 的中心与顶点 S 之间的距离为 ()
 (A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$
10. 设 m, k 为整数, 方程 $mx^2 - kx + 2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内有两个不同的根, 则 $m+k$ 的最小值为 ()
 (A) -8 (B) 8 (C) 12 (D) 13

二、填空题

11. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_7 = 37$, 则 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 =$ _____.

12. 已知单位向量 e_1, e_2 的夹角为 60° , 则 $|2e_1 - e_2| =$ _____.

13. 将一枚均匀的硬币抛掷 6 次, 则正面出现的次数比反面出现的次数多的概率为_____.

14. 已知 $\sin \alpha = \frac{1}{2} + \cos \alpha$, 且 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}$ 的值为_____.

15. 设圆 C 位于抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $x = 3$ 所围成的封闭区域 (包含边界) 内, 则圆 C 的半径能取到的最大值为_____.

三、解答题

16. 设 $a \in \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x(a \sin x - \cos x) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 满足 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f(0)$, 求函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{24}\right]$ 上的最大值和最小值.

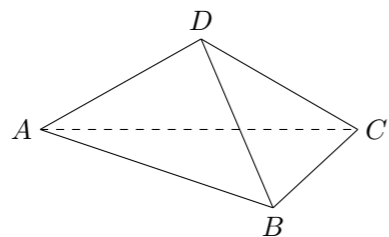
17. 某市公租房的房源位于 A, B, C 三个片区. 设每位申请人只申请其中一个片区的房源, 且申请其中任一个片区的房源是等可能的. 求该市的任 4 位申请人中:

- (1) 恰有 2 人申请 A 片区的房源的概率;
- (2) 申请的房源所在片区的个数 ξ 的分布列与期望.

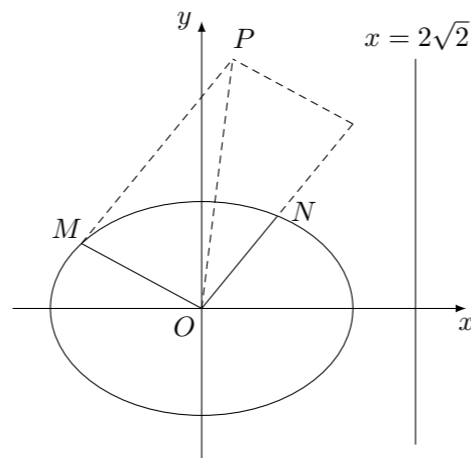
18. 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 的导数 $f'(x)$ 满足 $f'(1) = 2a, f'(2) = -b$, 其中常数 $a, b \in \mathbf{R}$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2) 设 $g(x) = f'(x)e^{-x}$, 求函数 $g(x)$ 的极值.

19. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, 平面 $ABC \perp$ 平面 ACD , $AB \perp BC$, $AD = CD$, $\angle CAD = 30^\circ$.
- (1) 若 $AD = 2$, $AB = 2BC$, 求四面体 $ABCD$ 的体积;
- (2) 若二面角 $C - AB - D$ 为 60° , 求异面直线 AD 与 BC 所成角的余弦值.



20. 如图, 椭圆的中心为原点 O , 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 一条准线的方程为 $x = 2\sqrt{2}$.
- (1) 求该椭圆的标准方程;
- (2) 设动点 P 满足: $\vec{OP} = \vec{OM} + 2\vec{ON}$, 其中 M, N 是椭圆上的点, 直线 OM 与 ON 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$. 问: 是否存在两个定点 F_1, F_2 , 使得 $|PF_1| + |PF_2|$ 为定值? 若存在, 求 F_1, F_2 的坐标; 若不存在, 说明理由.



21. 设实数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1} = a_{n+1}S_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
- (1) 若 $a_1, S_2, -2a_2$ 成等比数列, 求 S_2 和 a_3 ;
- (2) 求证: 对 $k \geq 3$ 有 $0 \leq a_{k+1} \leq a_k \leq \frac{4}{3}$.