2012 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

一、填空题

1. 计算: $\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$______. (i 为虚数单位)

2. 若集合 $A=\{x \mid 2x-1>0\}$, $B=\{x \mid |x|<1\}$, 则 $A\cap B=$______.

3. 函数 $f(x)=\begin{vmatrix}\sin x & 2\\ -1 & \cos x\end{vmatrix}$ 的最小正周期是______.

4. 若 $\overrightarrow{d}=(2,1)$ 是直线 l 的一个方向向量, 则 l 的倾斜角的大小为______. (结果用反三角函数值表示)

5. 一个高为 2 的圆柱, 底面周长为 2π. 该圆柱的表面积为______.

6. 方程 $4^x-2^{x+1}-3=0$ 的解是______.

7. 有一列正方体, 棱长组成以 1 为首项, $\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 体积分别记为 $V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(V_1+V_2+\cdots+V_n)=$______.

8. 在 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的二项展开式中, 常数项等于______.

9. 已知 $y=f(x)$ 是奇函数, 若 $g(x)=f(x)+2$ 且 $g(1)=1$, 则 $g(-1)=$______.

10. 满足约束条件 $|x|+2|y|\leqslant 2$ 的目标函数 $z=y-x$ 的最小值是______.

11. 三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛. 若每人只选择一个项目, 则有且仅有两人选择的项目相同的概率是______. (结果用最简分数表示)

12. 在矩形 $ABCD$ 中, 边 AB, AD 的长分别为 2, 1. 若 M, N 分别是 BC, CD 上的点, 且满足 $\dfrac{\left|\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{CN}\right|}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}$, 则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的取值范围是______.

13. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象是折线段 ABC, 其中 $A(0,0)$, $B\left(\dfrac{1}{2},1\right)$, $C(1,0)$. 函数 $y=xf(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的图象与 x 轴围成的图形的面积为______.

14. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+2}=f(a_n)$. 若 $a_{2010}=a_{2012}$, 则 $a_{20}+a_{11}$ 的值是______.

二、选择题

15. 若 $1+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个复数根, 则(   )

(A) $b=2$, $c=3$　　(B) $b=2$, $c=-1$

(C) $b=-2$, $c=-1$　　(D) $b=-2$, $c=3$

16. 对于常数 m, n, “$mn>0$”是“方程 $mx^2+ny^2=1$ 表示的曲线是椭圆”的 (   )

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 (   )

(A) 钝角三角形　(B) 直角三角形　(C) 锐角三角形　(D) 不能确定

18. 若 $S_n=\sin\dfrac{\pi}{7}+\sin\dfrac{2\pi}{7}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{7}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则在 $S_1, S_2, \cdots, S_{100}$ 中, 正数的个数是 (   )

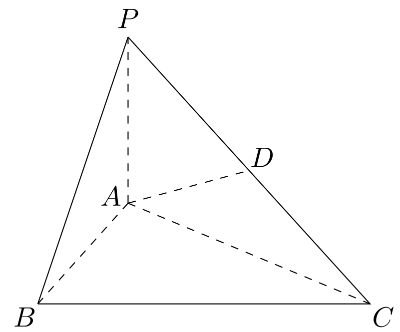
(A) 16　(B) 72　(C) 86　(D) 100

三、解答题

19. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA\perp$ 底面 ABC, D 是 PC 的中点. 已知 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$, $AB=2$, $AC=2\sqrt{3}$, $PA=2$. 求:

(1) 三棱锥 $P-ABC$ 的体积;

(2) 异面直线 BC 与 AD 所成的角的大小 (结果用反三角函数值表示).



20. 已知函数 $f(x)=\lg(x+1)$.

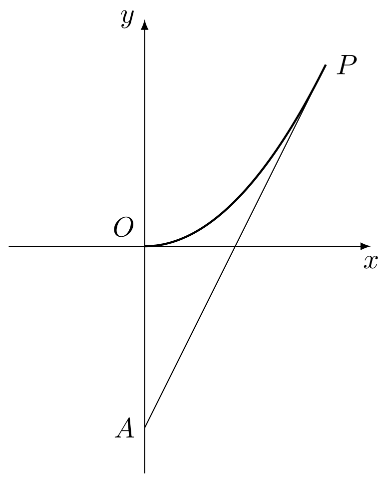
(1) 若 $0<f(1-2x)-f(x)<1$, 求 x 的取值范围;

(2) 若 $g(x)$ 是以 2 为周期的偶函数, 且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, 有 $g(x)=f(x)$, 求函数 $y=g(x)$ $(x\in[1,2])$ 的反函数.

21. 海事救援船对一艘失事船进行定位: 以失事船的当前位置为原点, 以正北方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系 (以 1 海里为单位长度), 则救援船恰好在失事船正南方向 12 海里 A 处, 如图. 现假设: ①失事船的移动路径可视为抛物线 $y=\dfrac{12}{49}x^2$; ②定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援; ③救援船出发 t 小时后, 失事船所在位置的横坐标为 $7t$.

(1) 当 $t=0.5$ 时, 写出失事船所在位置 P 的纵坐标. 若此时两船恰好会合, 求救援船速度的大小和方向;

(2) 问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船?



22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 C: $2x^2-y^2=1$.

(1) 设 F 是 C 的左焦点, M 是 C 右支上一点. 若 $|MF|=2\sqrt{2}$, 求点 M 的坐标;

(2) 过 C 的左顶点作 C 的两条渐近线的平行线, 求这两组平行线围成的平行四边形的面积;

(3) 设斜率为 k $\left(|k|<\sqrt{2}\right)$ 的直线 l 交 C 于 P, Q 两点. 若 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切, 求证: $OP\perp OQ$.

23. 对于项数为 m 的有穷数列 $\{a_n\}$, 记 $b_k=\max\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k\}$ $(k=1,2,\cdots,m)$, 即 b_k 为 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中的最大值, 并称数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列. 如 1, 3, 2, 5, 5 的控制数列是 1, 3, 3, 5, 5.

(1) 若各项均为正整数的数列 $\{a_n\}$ 的控制数列为 $2,3,4,5,5$, 写出所有的 $\{a_n\}$;

(2) 设 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列, 满足 $a_k+b_{m-k+1}=C$ (C 为常数, $k=1,2,\cdots,m$). 求证: $b_k=a_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$;

(3) 设 $m=100$, 常数 $a\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$. 若 $a_n=an^2-(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}n$, $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列, 求 $(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\cdots+(b_{100}-a_{100})$.