2012 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 计算: $\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$______. (i 为虚数单位)

2. 若集合 $A=\{x\mid 2x+1>0\}$, $B=\{x\mid |x-1|<2\}$, 则 $A\cap B=$______.

3. 函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2 & \cos x \\ \sin x & -1 \end{vmatrix}$ 的值域是______.

4. 若 $\vec{n}=(-2,1)$ 是直线 l 的一个法向量, 则 l 的倾斜角的大小为______. (结果用反三角函数值表示)

5. 在 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的二项展开式中, 常数项等于______.

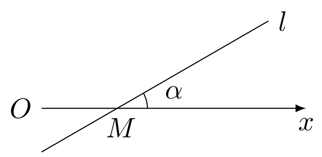
6. 有一列正方体, 棱长组成以 1 为首项, $\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 体积分别记为 $V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(V_1+V_2+\cdots+V_n)=$______.

7. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{|x-a|}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是______.

8. 若一个圆锥的侧面展开图是面积为 2π 的半圆面, 则该圆锥的体积为______.

9. 已知 $y=f(x)+x^2$ 是奇函数, 且 $f(1)=1$. 若 $g(x)=f(x)+2$, 则 $g(-1)=$______.

10. 如图, 在极坐标系中, 过点 $M(2,0)$ 的直线 l 与极轴的夹角 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$. 若将 l 的极坐标方程写成 $\rho=f(\theta)$ 的形式, 则 $f(\theta)=$______.

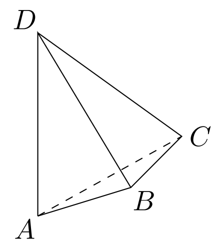


11. 三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛. 若每人都选择其中两个项目, 则有且仅有两人选择的项目完全相同的概率是______. (结果用最简分数表示)

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$, 边 AB, AD 的长分别为 2, 1. 若 M, N 分别是边 BC, CD 上的点, 且满足 $\dfrac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$, 则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的取值范围是______.

13. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象是折线段 ABC, 其中 $A(0,0)$, $B\left(\dfrac{1}{2},5\right)$, $C(1,0)$. 函数 $y=xf(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的图象与 x 轴围成的图形的面积为______.

14. 如图, AD 与 BC 是四面体 $ABCD$ 中互相垂直的棱, $BC=2$. 若 $AD=2c$, 且 $AB+BD=AC+CD=2a$, 其中 a、c 为常数, 则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值是______.



二、选择题

15. 若 $1+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个复数根, 则(　)

(A) $b=2$, $c=3$　　(B) $b=-2$, $c=3$

(C) $b=-2$, $c=-1$　　(D) $b=2$, $c=-1$

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 (　)

(A) 锐角三角形　(B) 直角三角形　(C) 钝角三角形　(D) 不能确定

17. 设 $10\leqslant x_1<x_2<x_3<x_4\leqslant 10^4$, $x_5=10^5$. 随机变量 ξ_1 取值 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的概率均为 0.2, 随机变量 ξ_2 取值 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $\dfrac{x_2+x_3}{2}$, $\dfrac{x_3+x_4}{2}$, $\dfrac{x_4+x_5}{2}$, $\dfrac{x_5+x_1}{2}$ 的概率也均为 0.2. 若记 $D\xi_1$, $D\xi_2$ 分别为 ξ_1, ξ_2 的方差, 则 (　)

(A) $D\xi_1>D\xi_2$

(B) $D\xi_1=D\xi_2$

(C) $D\xi_1<D\xi_2$

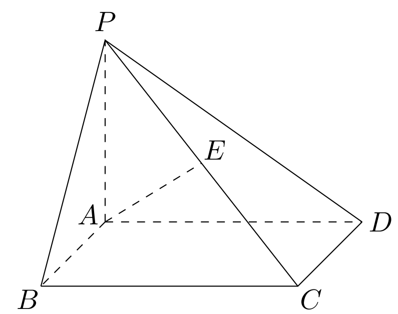
(D) $D\xi_1$ 与 $D\xi_2$ 的大小关系与 x_1, x_2, x_3, x_4 的取值有关

18. 设 $a_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{25}$, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 在 $S_1, S_2, \cdots, S_{100}$ 中, 正数的个数是 (　)

(A) 25　(B) 50　(C) 75　(D) 100

三、解答题

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, E 是 PC 的中点. 已知 $AB=2$, $AD=2\sqrt{2}$, $PA=2$. 求:
(1) 三角形 PCD 的面积;
(2) 异面直线 BC 与 AE 所成的角的大小.

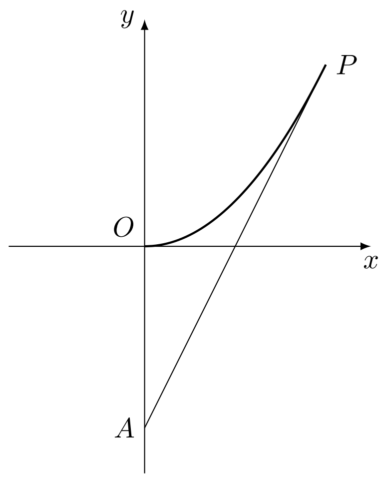


20. 已知函数 $f(x)=\lg(x+1)$.
(1) 若 $0<f(1-2x)-f(x)<1$, 求 x 的取值范围;
(2) 若 $g(x)$ 是以 2 为周期的偶函数, 且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, 有 $g(x)=f(x)$, 求函数 $y=g(x)$ $(x\in[1,2])$ 的反函数.

21. 海事救援船对一艘失事船进行定位: 以失事船的当前位置为原点, 以正北方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系 (以 1 海里为单位长度), 则救援船恰好在失事船正南方向 12 海里 A 处, 如图. 现假设: ①失事船的移动路径可视为抛物线 $y=\dfrac{12}{49}x^2$; ②定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援; ③救援船出发 t 小时后, 失事船所在位置的横坐标为 $7t$.

(1) 当 $t=0.5$ 时, 写出失事船所在位置 P 的纵坐标. 若此时两船恰好会合, 求救援船速度的大小和方向;

(2) 问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船?



22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 C_1: $2x^2-y^2=1$.

(1) 过 C_1 的左顶点引 C_1 的一条渐近线的平行线, 求该直线与另一条渐近线及 x 轴围成的三角形的面积;

(2) 设斜率为 1 的直线 l 交 C_1 于 P, Q 两点. 若 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切. 求证: $OP\perp OQ$;

(3) 设椭圆 C_2: $4x^2+y^2=1$. 若 M, N 分别是 C_1, C_2 上的动点, 且 $OM\perp ON$, 求证: O 到直线 MN 的距离是定值.

23. 对于数集 $X=\{-1,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$, 其中 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n$, $n\geqslant 2$, 定义向量集 $Y=\{\vec{a}\mid \vec{a}=(s,t),\ s\in X,\ t\in X\}$. 若对任意 $\vec{a}_1\in Y$, 存在 $\vec{a}_2\in Y$, 使得 $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0$, 则称 X 具有性质 $\mathbf{P}$. 例如 $\{-1,\ 1,\ 2\}$ 具有性质 $\mathbf{P}$.

(1) 若 $x>2$, 且 $\{-1,\ 1,\ 2,\ x\}$ 具有性质 $\mathbf{P}$, 求 x 的值;

(2) 若 X 具有性质 $\mathbf{P}$, 求证: $1\in X$, 且当 $x_n>1$ 时, $x_1=1$;

(3) 若 X 具有性质 $\mathbf{P}$, 且 $x_1=1$, $x_2=q$ (q 为常数), 求有穷数列 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的通项公式.