

2012 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

一、选择题

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 3x + 2 > 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbf{R} \mid (x + 1)(x - 3) > 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- (A)  $(-\infty, -1)$  (B)  $(-1, -\frac{2}{3})$  (C)  $(-\frac{2}{3}, 3)$  (D)  $(3, +\infty)$

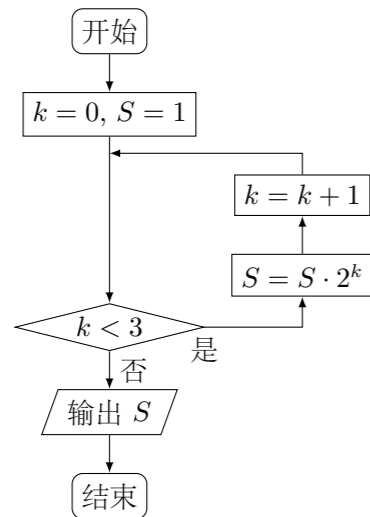
2. 在复平面内, 复数  $\frac{10i}{3+i}$  对应的点的坐标为 ( )

- (A) (1, 3) (B) (3, 1) (C) (-1, 3) (D) (3, -1)

3. 设不等式组  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$  表示的平面区域为  $D$ . 在区域  $D$  内随机取一个点, 则此点到坐标原点的距离大于 2 的概率是 ( )

- (A)  $\frac{\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi-2}{2}$  (C)  $\frac{\pi}{6}$  (D)  $\frac{4-\pi}{4}$

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的  $S$  值为 ( )



- (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

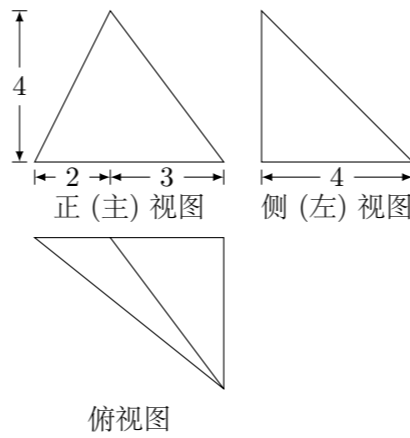
5. 函数  $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - (\frac{1}{2})^x$  的零点个数为 ( )

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

6. 已知  $\{a_n\}$  为等比数列, 下面结论中正确的是 ( )

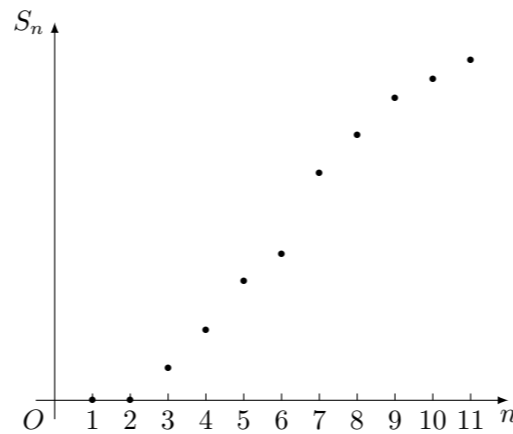
- (A)  $a_1 + a_3 \geq 2a_2$  (B)  $a_1^2 + a_3^2 \geq 2a_2^2$   
(C) 若  $a_1 = a_3$ , 则  $a_1 = a_2$  (D) 若  $a_3 > a_1$ , 则  $a_4 > a_2$

7. 某三棱锥的三视图如图所示, 该三棱锥的表面积是 ( )



- (A)  $28 + 6\sqrt{5}$  (B)  $30 + 6\sqrt{5}$  (C)  $56 + 12\sqrt{5}$  (D)  $60 + 12\sqrt{5}$

8. 某棵果树前  $n$  年的总产量  $S_n$  与  $n$  之间的关系如图所示. 从目前记录的结果看, 前  $m$  年的年平均产量最高,  $m$  的值为 ( )



- (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11

二、填空题

9. 直线  $y = x$  被圆  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$  截得的弦长为\_\_\_\_\_.
10. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和, 若  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $S_2 = a_3$ , 则  $a_2 =$ \_\_\_\_\_;  $S_n =$ \_\_\_\_\_.
11. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $a = 3$ ,  $b = \sqrt{3}$ ,  $\angle A = \frac{\pi}{3}$ , 则  $\angle C$  的大小为\_\_\_\_\_.
12. 已知函数  $f(x) = \lg x$ . 若  $f(ab) = 1$ , 则  $f(a^2) + f(b^2) =$ \_\_\_\_\_.
13. 已知正方形  $ABCD$  的边长为 1, 点  $E$  是  $AB$  边上的动点, 则  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB}$  的值为\_\_\_\_\_;  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$  的最大值为\_\_\_\_\_.
14. 已知  $f(x) = m(x - 2m)(x + m + 3)$ ,  $g(x) = 2^x - 2$ . 若  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) < 0$  或  $g(x) < 0$ , 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题

15. 已知函数  $f(x) = \frac{(\sin x - \cos x) \sin 2x}{\sin x}$ .  
(1) 求  $f(x)$  的定义域及最小正周期;  
(2) 求  $f(x)$  的单调递减区间.

16. 如图 1, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $D, E$  分别是  $AC, AB$  的中点, 点  $F$  为线段  $CD$  上的一点, 将  $\triangle ADE$  沿  $DE$  折起到  $\triangle A_1DE$  的位置, 使  $A_1F \perp CD$ , 如图 2.  
(1) 求证:  $DE \parallel$  平面  $A_1CB$ ;  
(2) 求证:  $A_1F \perp BE$ ;  
(3) 线段  $A_1B$  上是否存在点  $Q$ , 使  $A_1C \perp$  平面  $DEQ$ ? 说明理由.

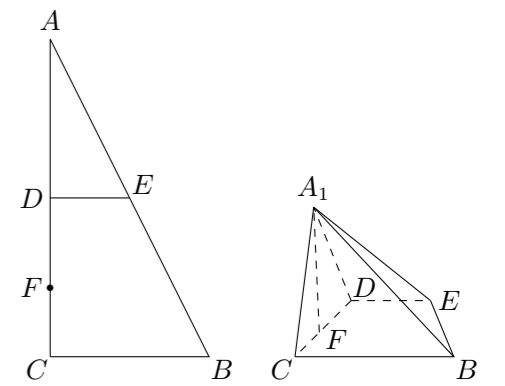


图 1

图 2

17. 近年来, 某市为促进生活垃圾的分类处理, 将生活垃圾分为厨余垃圾、可回收物和其他垃圾三类, 并分别设置了相应的垃圾箱. 为调查居民生活垃圾分类投放情况, 现随机抽取了该市三类垃圾箱中总计 1000 吨生活垃圾, 数据统计如下 (单位: 吨):

	“厨余垃圾”箱	“可回收物”箱	“其他垃圾”箱
厨余垃圾	400	100	100
可回收物	30	240	30
其他垃圾	20	20	60

- (1) 试估计厨余垃圾投放正确的概率;  
 (2) 试估计生活垃圾投放错误的概率;  
 (3) 假设厨余垃圾在“厨余垃圾”箱、“可回收物”箱、“其他垃圾”箱的投放量分别为  $a, b, c$ , 其中  $a > 0, a + b + c = 600$ . 当数据  $a, b, c$  的方差  $s^2$  最大时, 写出  $a, b, c$  的值 (结论不要求证明), 并求此时  $s^2$  的值.  
 (注:  $s^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$ , 其中  $\bar{x}$  为数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的平均数)

18. 已知函数  $f(x) = ax^2 + 1 (a > 0), g(x) = x^3 + bx$ .

- (1) 若曲线  $y = f(x)$  与曲线  $y = g(x)$  在它们的交点  $(1, c)$  处具有公共切线, 求  $a, b$  的值;  
 (2) 当  $a = 3, b = -9$  时, 若函数  $f(x) + g(x)$  在区间  $[k, 2]$  上的最大值为 28, 求  $k$  的取值范围.

19. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个顶点为  $A(2, 0)$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 直线  $y = k(x - 1)$  与椭圆  $C$  交于不同的两点  $M, N$ .  
 (1) 求椭圆  $C$  的方程;  
 (2) 当  $\triangle AMN$  的面积为  $\frac{\sqrt{10}}{3}$  时, 求  $k$  的值.

20. 设  $A$  是如下形式的 2 行 3 列的数表,

$a$	$b$	$c$
$d$	$e$	$f$

满足性质  $P: a, b, c, d, e, f \in [-1, 1]$ , 且  $a + b + c + d + e + f = 0$ .

记  $r_i(A)$  为  $A$  的第  $i$  行各数之和 ( $i = 1, 2$ ),  $c_j(A)$  为  $A$  的第  $j$  列各数之和 ( $j = 1, 2, 3$ ); 记  $k(A)$  为  $|r_1(A)|, |r_2(A)|, |c_1(A)|, |c_2(A)|, |c_3(A)|$  中的最小值.

- (1) 对如下数表  $A$ , 求  $k(A)$  的值;

1	1	-0.8
0.1	-0.3	-1

- (2) 设数表  $A$  形如

1	1	$-1 - 2d$
$d$	$d$	-1

其中  $-1 \leq d \leq 0$ . 求  $k(A)$  的最大值;

- (3) 对所有满足性质  $P$  的 2 行 3 列的数表  $A$ , 求  $k(A)$  的最大值.