

2012 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 3x + 2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid (x + 1)(x - 3) > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- (A) $(-\infty, -1)$ (B) $(-1, -\frac{2}{3})$ (C) $(-\frac{2}{3}, 3)$ (D) $(3, +\infty)$

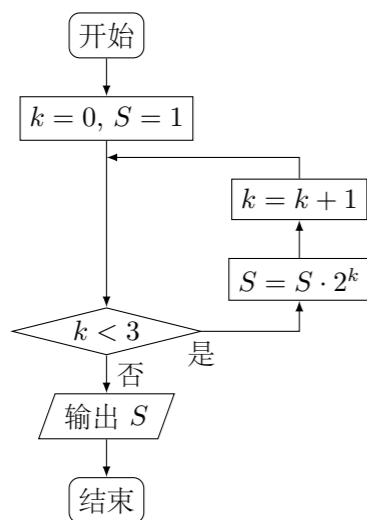
2. 设不等式组 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ 表示的平面区域为 D . 在区域 D 内随机取一个点, 则此点到坐标原点的距离大于 2 的概率是 ()

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi - 2}{2}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{4 - \pi}{4}$

3. 设 $a, b \in \mathbf{R}$. “ $a = 0$ ”是“复数 $a + bi$ 是纯虚数”的 ()

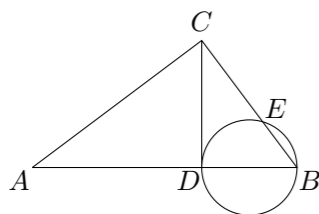
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为 ()



- (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

5. 如图, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于点 D , 以 BD 为直径的圆与 BC 交于点 E , 则 ()

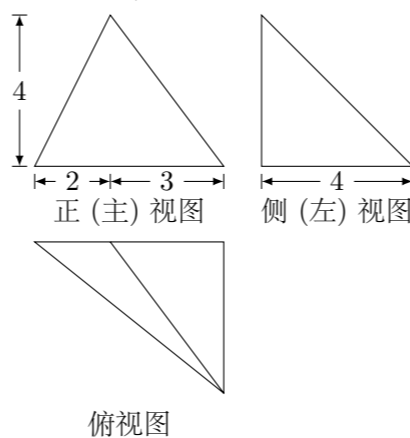


- (A) $CE \cdot CB = AD \cdot DB$ (B) $CE \cdot CB = AD \cdot AB$
(C) $AD \cdot AB = CD^2$ (D) $CE \cdot EB = CD^2$

6. 从 0, 2 中选一个数字, 从 1, 3, 5 中选两个数字, 组成无重复数字的三位数, 其中奇数的个数为 ()

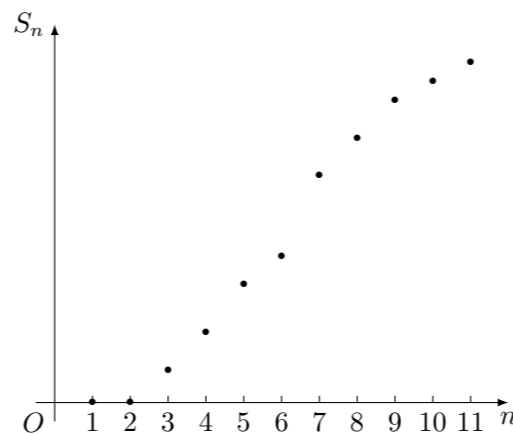
- (A) 24 (B) 18 (C) 12 (D) 6

7. 某三棱锥的三视图如图所示, 该三棱锥的表面积是



- (A) $28 + 6\sqrt{5}$ (B) $30 + 6\sqrt{5}$ (C) $56 + 12\sqrt{5}$ (D) $60 + 12\sqrt{5}$

8. 某棵果树前 n 年的总产量 S_n 与 n 之间的关系如图所示. 从目前记录的结果看, 前 m 年的年平均产量最高, m 的值为 ()



- (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11

二、填空题

9. 直线 $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -1 - t, \end{cases}$ (t 为参数) 与曲线 $\begin{cases} x = 3 \cos \alpha, \\ y = 3 \sin \alpha, \end{cases}$ (α 为参数) 的交点个数为_____.

10. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 $a_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = a_3$, 则 $a_2 =$ _____; $S_n =$ _____.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 2$, $b + c = 7$, $\cos B = -\frac{1}{4}$, 则 $b =$ _____.

12. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F , 且与该抛物线相交于 A, B 两点, 其中点 A 在 x 轴上方. 若直线 l 的倾斜角为 60° , 则 $\triangle OAF$ 的面积为_____.

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 是 AB 边上的动点, 则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的值为_____; $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$ 的最大值为_____.

14. 已知 $f(x) = m(x - 2m)(x + m + 3)$, $g(x) = 2^x - 2$. 若同时满足条件: ① $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) < 0$ 或 $g(x) < 0$; ② $\exists x \in (-\infty, -4), f(x)g(x) < 0$, 则 m 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = \frac{(\sin x - \cos x) \sin 2x}{\sin x}$.
(1) 求 $f(x)$ 的定义域及最小正周期;
(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

16. 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 6$. D, E 分别是 AC, AB 上的点, 且 $DE \parallel BC$, $DE = 2$, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置, 使 $A_1C \perp CD$, 如图 2.

- (1) 求证: $A_1C \perp$ 平面 $BCDE$;
(2) 若 M 是 A_1D 的中点, 求 CM 与平面 A_1BE 所成角的大小;
(3) 线段 BC 上是否存在点 P , 使平面 A_1DP 与平面 A_1BE 垂直? 说明理由.

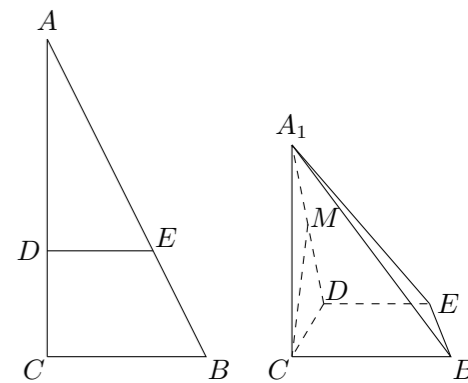


图 1

图 2

17. 近年来,某市为促进生活垃圾的分类处理,将生活垃圾分为厨余垃圾、可回收物和其他垃圾三类,并分别设置了相应的垃圾箱.为调查居民生活垃圾分类投放情况,现随机抽取了该市三类垃圾箱中总计 1000 吨生活垃圾,数据统计如下(单位:吨):

	“厨余垃圾”箱	“可回收物”箱	“其他垃圾”箱
厨余垃圾	400	100	100
可回收物	30	240	30
其他垃圾	20	20	60

- (1) 试估计厨余垃圾投放正确的概率;
(2) 试估计生活垃圾投放错误的概率;
(3) 假设厨余垃圾在“厨余垃圾”箱、“可回收物”箱、“其他垃圾”箱的投放量分别为 a, b, c , 其中 $a > 0, a + b + c = 600$. 当数据 a, b, c 的方差 s^2 最大时, 写出 a, b, c 的值(结论不要求证明), 并求此时 s^2 的值.
(注: $s^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$, 其中 \bar{x} 为数据 x_1, x_2, \cdots, x_n 的平均数)

18. 已知函数 $f(x) = ax^2 + 1 (a > 0), g(x) = x^3 + bx$.

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处具有公共切线, 求 a, b 的值;
(2) 当 $a^2 = 4b$ 时, 求函数 $f(x) + g(x)$ 的单调区间, 并求其在区间 $(-\infty, -1]$ 上的最大值.

19. 已知曲线 $C: (5 - m)x^2 + (m - 2)y^2 = 8 (m \in \mathbf{R})$.

- (1) 若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆, 求 m 的取值范围;
(2) 设 $m = 4$, 曲线 C 与 y 轴的交点为 A, B (点 A 位于点 B 的上方), 直线 $y = kx + 4$ 与曲线 C 交于不同的两点 M, N , 直线 $y = 1$ 与直线 BM 交于点 G . 求证: A, G, N 三点共线.

20. 设 A 是由 $m \times n$ 个实数组成的 m 行 n 列的数表, 满足: 每个数的绝对值不大于 1, 且所有数的和为零. 记 $S(m, n)$ 为所有这样的数表构成的集合. 对于 $A \in S(m, n)$, 记 $r_i(A)$ 为 A 的第 i 行各数之和 ($1 \leq i \leq m$), $c_j(A)$ 为 A 的第 j 列各数之和 ($1 \leq j \leq n$); 记 $k(A)$ 为 $|r_1(A)|, |r_2(A)|, \cdots, |r_m(A)|, |c_1(A)|, |c_2(A)|, \cdots, |c_n(A)|$ 中的最小值.

- (1) 对如下数表 A , 求 $k(A)$ 的值;

1	1	-0.8
0.1	-0.3	-1

- (2) 设数表 $A \in S(2, 3)$ 形如

1	1	c
a	b	-1

求 $k(A)$ 的最大值;

- (3) 给定正整数 t , 对于所有的 $A \in S(2, 2t + 1)$, 求 $k(A)$ 的最大值.