

2012 普通高等学校招生考试 (四川卷理)

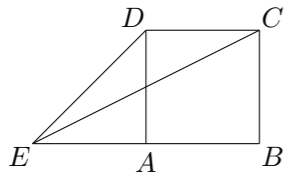
一、选择题

1. $(1+x)^7$ 的展开式中 x^2 的系数是 ()
 (A) 42 (B) 35 (C) 28 (D) 21

2. 复数 $\frac{(1-i)^2}{2i} =$ ()
 (A) 1 (B) -1 (C) i (D) -i

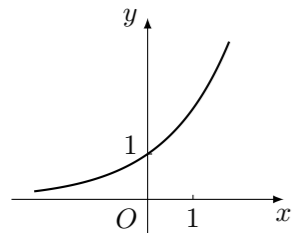
3. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x < 3, \\ \ln(x-2), & x \geq 3, \end{cases}$ 在 $x=3$ 处的极限是 ()
 (A) 不存在 (B) 等于 6 (C) 等于 3 (D) 等于 0

4. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 延长 BA 至 E , 使 $AE=1$, 连接 EC , ED , 则 $\sin \angle CED =$ ()

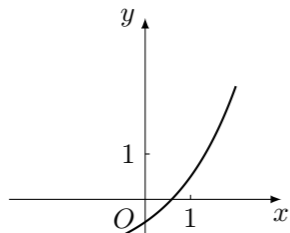


(A) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{15}$

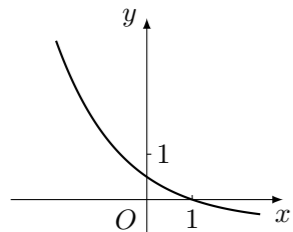
5. 函数 $y = a^x - \frac{1}{a}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象可能是 ()



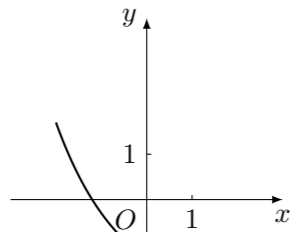
(A)



(B)



(C)



(D)

6. 下列命题正确的是 ()

- (A) 若两条直线和同一个平面所成的角相等, 则这两条直线平行
- (B) 若一个平面内有三个点到另一个平面的距离相等, 则这两个平面平行

(C) 若一条直线平行于两个相交平面, 则这条直线与这两个平面的交线平行

(D) 若两个平面都垂直于第三个平面, 则这两个平面平行

7. 设 a, b 都是非零向量. 下列四个条件中, 使 $\frac{a}{|a|} = \frac{b}{|b|}$ 成立的充分条件是 ()

- (A) $a = -b$ (B) $a \parallel b$
- (C) $a = 2b$ (D) $|a| = |b|$ 且 $a \parallel b$

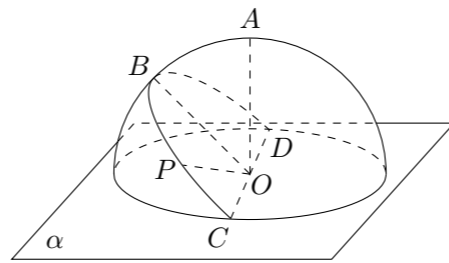
8. 已知抛物线关于 x 轴对称, 它的顶点在坐标原点 O , 并且经过点 $M(2, y_0)$. 若点 M 到该抛物线焦点的距离为 3, 则 $|OM| =$ ()

- (A) $2\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 4 (D) $2\sqrt{5}$

9. 某公司生产甲、乙两种桶装产品. 已知生产甲产品 1 桶需耗 A 原料 1 千克、 B 原料 2 千克; 生产乙产品 1 桶需耗 A 原料 2 千克、 B 原料 1 千克. 每桶甲产品的利润是 300 元, 每桶乙产品的利润是 400 元. 公司在生产这两种产品的计划中, 要求每天消耗 A, B 原料都不超过 12 千克. 通过合理安排生产计划, 从每天生产的甲、乙两种产品中, 公司共可获得的最大利润是 ()

- (A) 1800 元 (B) 2400 元 (C) 2800 元 (D) 3100 元

10. 如图, 半径为 R 的半球 O 的底面圆 O 在平面 α 内, 过点 O 作平面 α 的垂线交半球面于点 A , 过圆 O 的直径 CD 作与平面 α 成 45° 角的平面与半球面相交, 所得交线上到平面 α 的距离最大的点为 B , 该交线上的一点 P 满足 $\angle BOP = 60^\circ$, 则 A, P 两点间的球面距离为 ()



- (A) $R \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{\pi R}{4}$ (C) $R \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\pi R}{3}$

11. 方程 $ay = b^2x^2 + c$ 中的 $a, b, c \in \{-3, -2, 0, 1, 2, 3\}$, 且 a, b, c 互不相同, 在所有这些方程所表示的曲线中, 不同的抛物线共有 ()

- (A) 60 条 (B) 62 条 (C) 71 条 (D) 80 条

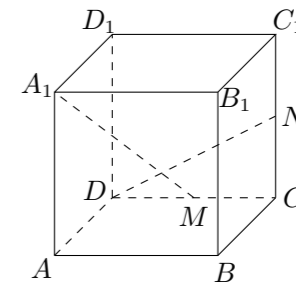
12. 设函数 $f(x) = 2x - \cos x$, $\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{\pi}{8}$ 的等差数列, $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_5) = 5\pi$, 则 $[f(a_3)]^2 - a_1 a_5 =$ ()

- (A) 0 (B) $\frac{1}{16}\pi^2$ (C) $\frac{1}{8}\pi^2$ (D) $\frac{13}{16}\pi^2$

二、填空题

13. 设全集 $U = \{a, b, c, d\}$, 集合 $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$, 则 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) =$ _____.

14. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是 CD, CC_1 的中点, 则异面直线 A_1M 与 DN 所成角的大小是 _____.



15. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点为 F , 直线 $x = m$ 与椭圆相交于点 A, B , 当 $\triangle FAB$ 的周长最大时, $\triangle FAB$ 的面积是 _____.

16. 记 $[x]$ 为不超过实数 x 的最大整数, 例如, $[2] = 2, [1.5] = 1, [-0.3] = -1$.

设 a 为正整数, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = a, x_{n+1} = \left\lfloor \frac{x_n + \left\lfloor \frac{a}{x_n} \right\rfloor}{2} \right\rfloor$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

现有下列命题:

- ① 当 $a = 5$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 的前 3 项依次为 5, 3, 2;
- ② 对数列 $\{x_n\}$ 都存在正整数 k , 当 $n \geq k$ 时总有 $x_n = x_k$;
- ③ 当 $n \geq 1$ 时, $x_n > \sqrt{a} - 1$;
- ④ 对某个正整数 k , 若 $x_{k+1} \geq x_k$, 则 $x_n = \lfloor \sqrt{a} \rfloor$.

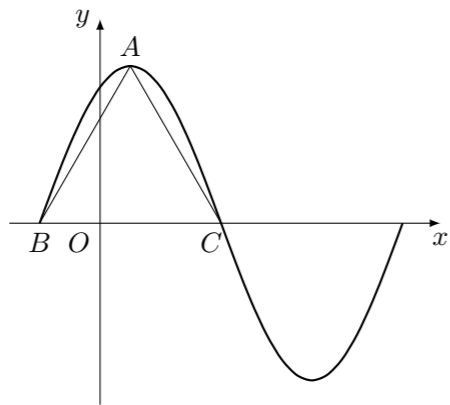
其中的真命题有 _____ (写出所有真命题的编号)

三、解答题

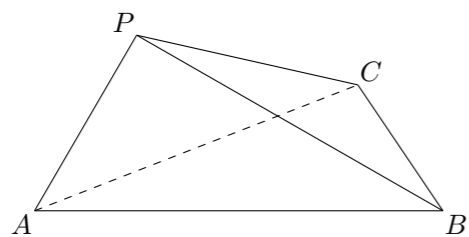
17. 某居民小区有两个相互独立的安全防范系统 (简称系统) A 和 B , 系统 A 和 B 在任意时刻发生故障的概率分别为 $\frac{1}{10}$ 和 p .

- (1) 若在任意时刻至少有一个系统不发生故障的概率为 $\frac{49}{50}$, 求 p 的值;
- (2) 设系统 A 在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数为随机变量 ξ , 求 ξ 的概率分布列及数学期望 $E\xi$.

18. 函数 $f(x) = 6\cos^2\frac{\omega x}{2} + \sqrt{3}\sin\omega x - 3$ ($\omega > 0$) 在一个周期内的图象如图所示, A 为图象的最高点, B, C 为图象与 x 轴的交点, 且 $\triangle ABC$ 为正三角形.
- (1) 求 ω 的值及函数 $f(x)$ 的值域;
 (2) 若 $f(x_0) = \frac{8\sqrt{3}}{5}$, 且 $x_0 \in \left(-\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 求 $f(x_0 + 1)$ 的值.

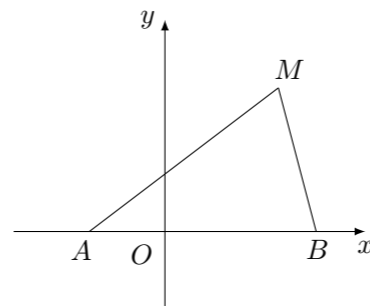


19. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\angle APB = 90^\circ$, $\angle PAB = 60^\circ$, $AB = BC = CA$, 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC .
- (1) 求直线 PC 与平面 ABC 所成角的正弦值;
 (2) 求二面角 $B-AP-C$ 的余弦值.



20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 a_n = S_2 + S_n$ 对一切正整数 n 都成立.
- (1) 求 a_1, a_2 的值;
 (2) 设 $a_1 > 0$, 数列 $\left\{\lg \frac{10a_1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 当 n 为何值时, T_n 最大? 并求出 T_n 的最大值.

21. 如图, 动点 M 与两定点 $A(-1, 0), B(2, 0)$ 构成 $\triangle MAB$, 且 $\angle MBA = 2\angle MAB$, 设动点 M 的轨迹为 C .
- (1) 求轨迹 C 的方程;
 (2) 设直线 $y = -2x + m$ 与 y 轴相交于点 P , 与轨迹 C 相交于点 Q, R , 且 $|PQ| < |PR|$, 求 $\frac{|PR|}{|PQ|}$ 的取值范围.



22. 已知 a 为正实数, n 为自然数, 抛物线 $y = -x^2 + \frac{a^n}{2}$ 与 x 轴正半轴相交于点 A , 设 $f(n)$ 为该抛物线在点 A 处的切线在 y 轴上的截距.
- (1) 用 a 和 n 表示 $f(n)$;
 (2) 求对所有 n 都有 $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n^3}{n^3+1}$ 成立的 a 的最小值;
 (3) 当 $0 < a < 1$ 时, 比较 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)-f(2k)}$ 与 $\frac{27}{4} \cdot \frac{f(1)-f(n)}{f(0)-f(1)}$ 的大小, 并说明理由.