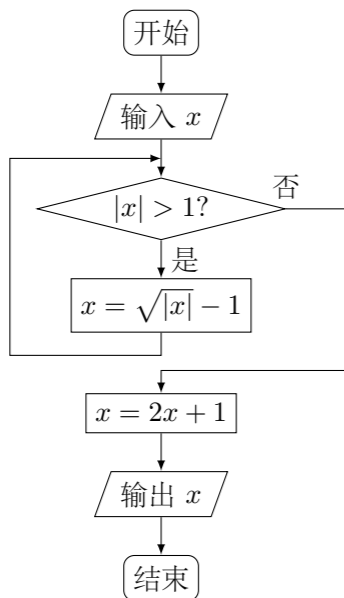


2012 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

- i 是虚数单位, 复数 $\frac{7-i}{3+i} =$ ()
 (A) $2+i$ (B) $2-i$ (C) $-2+i$ (D) $-2-i$
- 设 $\varphi \in \mathbf{R}$, 则“ $\varphi=0$ ”是“ $f(x) = \cos(x+\varphi) (x \in \mathbf{R})$ 为偶函数”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 当输入 x 的值为 -25 时, 输出 x 的值为 ()



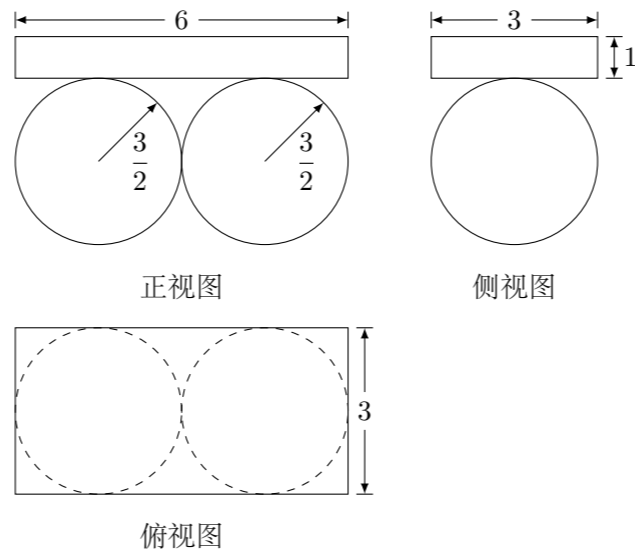
- (A) -1 (B) 1 (C) 3 (D) 9
- 函数 $f(x) = 2^x + x^3 - 2$ 在区间 $(0, 1)$ 内的零点个数是 ()
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 在 $(2x^2 - \frac{1}{x})^5$ 的二项展开式中, x 的系数为 ()
 (A) 10 (B) -10 (C) 40 (D) -40
- 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 已知 $8b = 5c, C=2B$, 则 $\cos C =$ ()
 (A) $\frac{7}{25}$ (B) $-\frac{7}{25}$ (C) $\pm\frac{7}{25}$ (D) $\frac{24}{25}$
- 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形, $AB = 2$, 设点 P, Q 满足 $\vec{AP} = \lambda\vec{AB}$, $\vec{AQ} = (1-\lambda)\vec{AC}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 若 $\vec{BQ} \cdot \vec{CP} = -\frac{3}{2}$, 则 $\lambda =$ ()
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$ (D) $\frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

- 设 $m, n \in \mathbf{R}$, 若直线 $(m+1)x + (n+1)y - 2 = 0$ 与圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 相切, 则 $m+n$ 的取值范围是 ()
 (A) $[1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]$ (B) $(-\infty, 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}, +\infty)$
 (C) $[2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}]$ (D) $(-\infty, 2 - 2\sqrt{2}] \cup [2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$

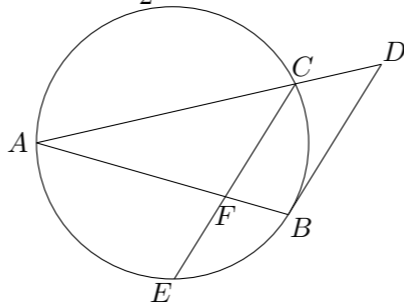
二、填空题

- 某地区有小学 150 所, 中学 75 所, 大学 25 所. 现采用分层抽样的方法从这些学校中抽取 30 所学校对学生进行视力调查, 应从小学中抽取_____所学校, 中学中抽取_____所学校.

- 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为_____ m^3 .



- 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x+2| < 3\}$, 集合 $B = \{x \in \mathbf{R} \mid (x-m)(x-2) < 0\}$, 且 $A \cap B = (-1, n)$, 则 $m =$ _____, $n =$ _____.
- 已知抛物线的参数方程为 $\begin{cases} x = 2pt^2, \\ y = 2pt, \end{cases}$ (t 为参数), 其中 $p > 0$, 焦点为 F , 准线为 l , 过抛物线上一点 M 作 l 的垂线, 垂足为 E , 若 $|EF| = |MF|$, 点 M 的横坐标是 3, 则 $p =$ _____.
- 如图, 已知 AB 和 AC 是圆的两条弦, 过点 B 作圆的切线与 AC 的延长线相交于点 D . 过点 C 作 BD 的平行线与圆相交于点 E , 与 AB 相交于点 F , $AF = 3, FB = 1, EF = \frac{3}{2}$, 则线段 CD 的长为_____.



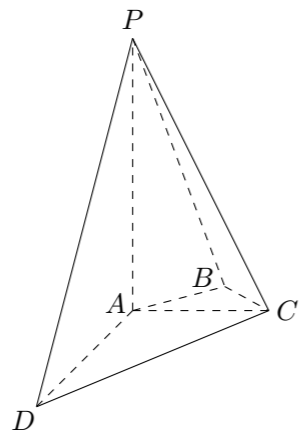
- 已知函数 $y = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$ 的图象与函数 $y = kx - 2$ 的图象恰有两个交点, 则实数 k 的取值范围是_____.

三、解答题

- 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 2\cos^2 x - 1, x \in \mathbf{R}$.
 (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
 (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

- 有 4 个人去参加某娱乐活动, 该活动有甲、乙两个游戏可供参加者选择. 为增加趣味性, 约定: 每个人通过掷一枚质地均匀的骰子决定自己去参加哪个游戏, 掷出点数为 1 或 2 的人去参加甲游戏, 掷出点数大于 2 的人去参加乙游戏.
 (1) 求这 4 个人中恰有 2 人去参加甲游戏的概率;
 (2) 求这 4 个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏的人数的概率;
 (3) 用 X, Y 分别表示这 4 个人中去参加甲、乙游戏的人数, 记 $\xi = |X - Y|$, 求随机变量 ξ 的分布列与数学期望 $E\xi$.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \perp AD$, $AB \perp BC$, $\angle BAC = 45^\circ$, $PA = AD = 2$, $AC = 1$.
- (1) 证明 $PC \perp AD$;
 - (2) 求二面角 $A-PC-D$ 的正弦值;
 - (3) 设 E 为棱 PA 上的点, 满足异面直线 BE 与 CD 所成的角为 30° , 求 AE 的长.



19. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右顶点分别为 A, B , 点 P 在椭圆上且异于 A, B 两点, O 为坐标原点.
- (1) 若直线 AP 与 BP 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 求椭圆的离心率;
 - (2) 若 $|AP| = |OA|$, 证明直线 OP 的斜率 k 满足 $|k| > \sqrt{3}$.

20. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x + a)$ 的最小值为 0, 其中 $a > 0$.
- (1) 求 a 的值;
 - (2) 若对任意的 $x \in [0, +\infty)$, 有 $f(x) \leq kx^2$ 成立, 求实数 k 的最小值;
 - (3) 证明: $\sum_{i=1}^n \frac{2}{2i-1} - \ln(2n+1) < 2$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

18. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 = b_1 = 2$, $a_4 + b_4 = 27$, $S_4 - b_4 = 10$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;
 - (2) 记 $T_n = a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 证明 $T_n + 12 = -2a_n + 10b_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$).