2012 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

一、选择题

1. 若复数 z 满足 $z(2-\mathrm{i})=11+7\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则 z 为 ( )

(A) $3+5\mathrm{i}$ (B) $3-5\mathrm{i}$ (C) $-3+5\mathrm{i}$ (D) $-3-5\mathrm{i}$

2. 已知全集 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, 集合 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 4\}$, 则 $(\complement_U A)\cup B=$ ( )

(A) $\{1,\ 2,\ 4\}$ (B) $\{2,\ 3,\ 4\}$ (C) $\{0,\ 2,\ 4\}$ (D) $\{0,\ 2,\ 3\,4\}$

3. 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$, 则"函数 $f(x)=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数"是"函数 $g(x)=(2-a)x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数"的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

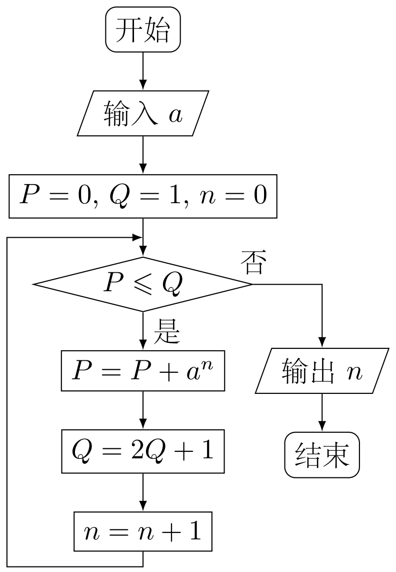
4. 采用系统抽样方法从 960 人中抽取 32 人做问卷调查. 为此将他们随机编号为 1, 2, $\cdots$, 960, 分组后在第一组采用简单随机抽样的方法抽到的号码为 9. 抽到的 32 人中, 编号落入区间 $[1,450]$ 的人做问卷 A, 编号落入区间 $[451,750]$ 的人做问卷 B, 其余的人做问卷 C. 则抽到的人中, 做问卷 B 的人数为 ( )

(A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 15

5. 设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\geqslant 2,\\ 2x+y\leqslant 4,\\ 4x-y\geqslant -1,\end{cases}$ 则目标函数 $z=3x-y$ 的取值范围是 ( )

(A) $\left[-\dfrac{3}{2},6\right]$ (B) $\left[-\dfrac{3}{2},-1\right]$ (C) $[-1,6]$ (D) $\left[-6,\dfrac{3}{2}\right]$

6. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $a=4$, 那么输出的 n 的值为 ( )



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

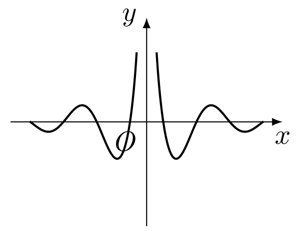
7. 若 $\theta\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin 2\theta=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$, 则 $\sin\theta=$ ( )

(A) $\dfrac{3}{5}$ (B) $\dfrac{4}{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

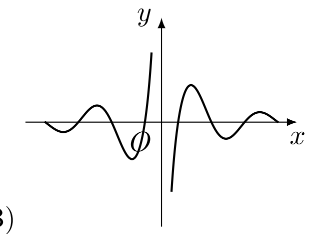
8. 定义在 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+6)=f(x)$. 当 $-3\leqslant x<-1$ 时, $f(x)=-(x+2)^2$; 当 $-1\leqslant x<3$ 时, $f(x)=x$. 则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2012)=$ ( )

(A) 335 (B) 338 (C) 1678 (D) 2012

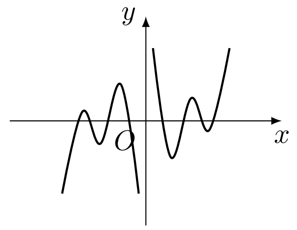
9. 函数 $f(x)=\dfrac{\cos 6x}{2^x-2^{-x}}$ 的图象大致为 ( )



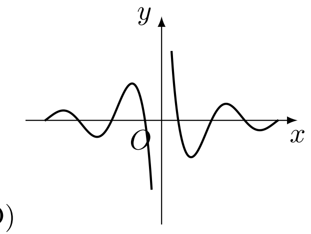
(A)



(B)



(C)



(D)

10. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的渐近线与椭圆 C 有四个交点, 以这四个交点为顶点的四边形的面积为 16, 则椭圆 C 的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{6}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$

11. 现有 16 张不同的卡片, 其中红色、黄色、蓝色、绿色卡片各 4 张, 从中任取 3 张. 要求这 3 张卡片不能是同一种颜色, 且红色卡片至多 1 张. 不同的取法种数为 ( )

(A) 232 (B) 252 (C) 472 (D) 484

12. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=ax^2+bx\ (a,\ b\in\mathbf{R},\ a\neq 0)$. 若 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 图象有且仅有两个不同的公共点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 则下列判断正确的是 ( )

(A) 当 $a<0$ 时, $x_1+x_2<0$, $y_1+y_2>0$

(B) 当 $a<0$ 时, $x_1+x_2>0$, $y_1+y_2<0$

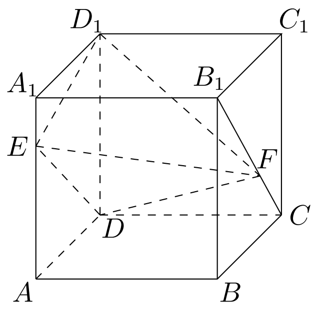
(C) 当 $a>0$ 时, $x_1+x_2<0$, $y_1+y_2<0$

(D) 当 $a>0$ 时, $x_1+x_2>0$, $y_1+y_2>0$

二、填空题

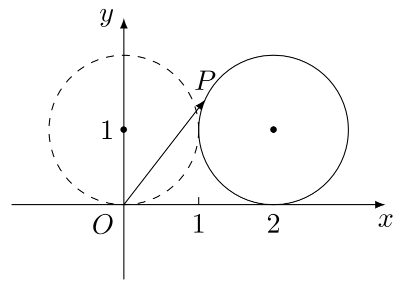
13. 若不等式 $|kx-4|\leqslant 2$ 的解集为 $\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 3\}$, 则实数 $k=$______.

14. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F 分别为线段 AA_1, B_1C 上的点, 则三棱锥 D_1-EDF 的体积为______.



15. 设 $a>0$, 若曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=a$, $y=0$ 所围成封闭图形的面积为 a^2, 则 $a=$______.

16. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一单位圆的圆心的初始位置在 $(0,1)$, 此时圆上一点 P 的位置在 $(0,0)$, 圆在 x 轴上沿正向滚动. 当圆滚动到圆心位于 $(2,1)$ 时, $\overrightarrow{OP}$ 的坐标为______.



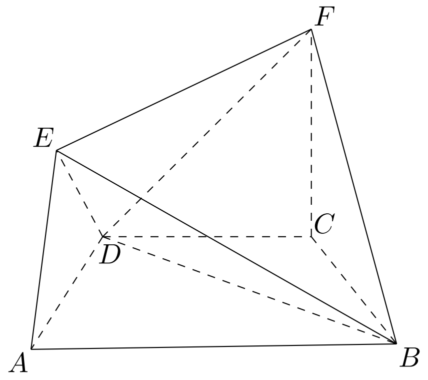
三、解答题

17. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\sin x,1)$, $\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3}A\cos x,\dfrac{A}{2}\cos 2x\right)\ (A>0)$, 函数 $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$ 的最大值为 6.

(1) 求 A;

(2) 将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位, 再将所得图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求 $g(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{5\pi}{24}\right]$ 上的值域.

18. 在如图所示的几何体中, 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 60°$, $FC \perp$ 平面 $ABCD$, $AE \perp BD$, $CB = CD = CF$.
(1) 求证: $BD \perp$ 平面 AED;
(2) 求二面角 $F - BD - C$ 的余弦值.



19. 现有甲乙两个靶, 某射手向甲靶射击一次命中的概率为 $\dfrac{3}{4}$, 命中得 1 分, 没有命中得 0 分; 向乙靶射击两次, 每次命中的概率为 $\dfrac{2}{3}$, 每命中一次得 2 分, 没有命中得 0 分. 该射手每次射击的结果相互独立, 假设该射手完成以上三次射击.
(1) 求该射手恰好命中一次的概率;
(2) 求该射手的总得分 X 的分布列及数学期望 EX.

20. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_4 + a_5 = 84$, $a_9 = 73$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 对任意 $m \in \mathbf{N}^*$, 将数列 $\{a_n\}$ 中落入区间 $(9^m, 9^{2m})$ 内的项的个数记为 b_m, 求数列 $\{b_m\}$ 的前 m 项和 S_m.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是抛物线 C: $x^2 = 2py$ $(p > 0)$ 的焦点, M 是抛物线 C 上位于第一象限内的任意一点, 过 M, F, O 三点的圆的圆心为 Q, 点 Q 到抛物线 C 的准线的距离为 $\dfrac{3}{4}$.
(1) 求抛物线 C 的方程;
(2) 是否存在点 M, 使得直线 MQ 与抛物线 C 相切于点 M? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 说明理由;
(3) 若点 M 的横坐标为 $\sqrt{2}$, 直线 l: $y = kx + \dfrac{1}{4}$ 与抛物线 C 有两个不同的交点 A, B, l 与圆 Q 有两个不同的交点 D, E, 求当 $\dfrac{1}{2} \leqslant k \leqslant 2$ 时, $|AB|^2 + |DE|^2$ 的最小值.

22. 已知函数 $f(x) = \dfrac{\ln x + k}{\mathrm{e}^x}$ (k 为常数, $\mathrm{e} = 2.71828\cdots$ 是自然对数的底数), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行.
(1) 求 k 的值;
(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(3) 设 $g(x) = (x^2 + x)f'(x)$, 其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数. 证明: 对任意 $x > 0$, $g(x) < 1 + \mathrm{e}^{-2}$.