2012 普通高等学校招生考试 (广东卷理)

一、选择题

1. 设 i 为虚数单位, 则复数 $\dfrac{5-6\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $6+5\mathrm{i}$ (B) $6-5\mathrm{i}$ (C) $-6+5\mathrm{i}$ (D) $-6-5\mathrm{i}$

2. 设集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $M=\{1,\ 2,\ 4\}$, 则 $\complement_U M=$ ( )

(A) U (B) $\{1,\ 3,\ 5\}$ (C) $\{3,\ 5,\ 6\}$ (D) $\{2,\ 4,\ 6\}$

3. 若向量 $\overrightarrow{BA}=(2,3)$, $\overrightarrow{CA}=(4,7)$, 则 $\overrightarrow{BC}=$ ( )

(A) $(-2,-4)$ (B) $(3,4)$ (C) $(6,10)$ (D) $(-6,-10)$

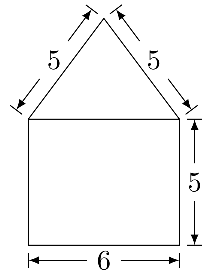
4. 下列函数中, 在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是 ( )

(A) $y=\ln(x+2)$ (B) $y=-\sqrt{x+1}$ (C) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ (D) $y=x+\dfrac{1}{x}$

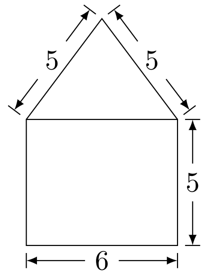
5. 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant 2, \\ x+y\geqslant 1, \\ x-y\leqslant 1, \end{cases}$ 则 $z=3x+y$ 的最大值为 ( )

(A) 12 (B) 11 (C) 3 (D) -1

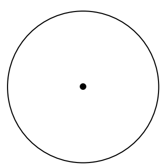
6. 某几何体的三视图如图所示, 则它的体积为 ( )



正视图



侧视图


俯视图

(A) 12π (B) 45π (C) 57π (D) 81π

7. 从个位数与十位数之和为奇数的两位数中任取一个, 其个位数为 0 的概率是 ( )

(A) $\dfrac{4}{9}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{2}{9}$ (D) $\dfrac{1}{9}$

8. 对任意两个非零的平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$, 定义 $\boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}$. 若平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|>0$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$, 且 $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}$ 都在集合 $\left\{\dfrac{n}{2}\mid n\in\mathbf{Z}\right\}$ 中, 则 $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) $\dfrac{5}{2}$

二、填空题

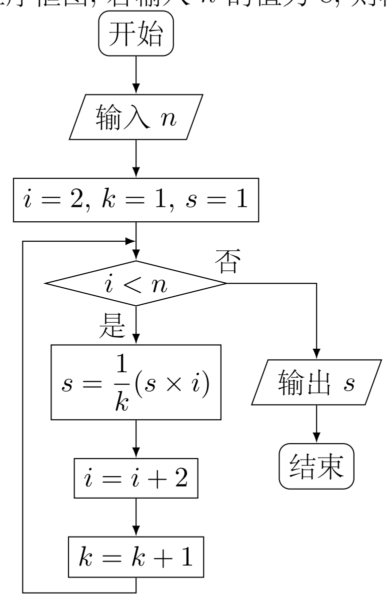
9. 不等式 $|x+2|-|x|\leqslant 1$ 的解集为______.

10. $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为______. (用数字作答)

11. 已知递增的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_3=a_2^2-4$, 则 $a_n=$______.

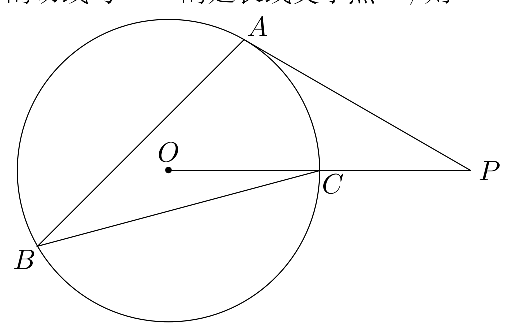
12. 曲线 $y=x^3-x+3$ 在点 $(1,3)$ 处的切线方程为______.

13. 执行如图所示的程序框图, 若输入 n 的值为 8, 则输出 s 的值为______.



14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 和 C_2 的参数方程分别为 $\begin{cases} x=t, \\ y=\sqrt{t}, \end{cases}$ (t 为参数) 和 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{2}\sin\theta, \end{cases}$ (θ 为参数), 则曲线 C_1 和 C_2 的交点坐标为______.

15. 如图, 圆 O 的半径为 1, A, B, C 是圆周上的三点, 满足 $\angle ABC=30^\circ$, 过点 A 作圆 O 的切线与 OC 的延长线交于点 P, 则 $PA=$______.



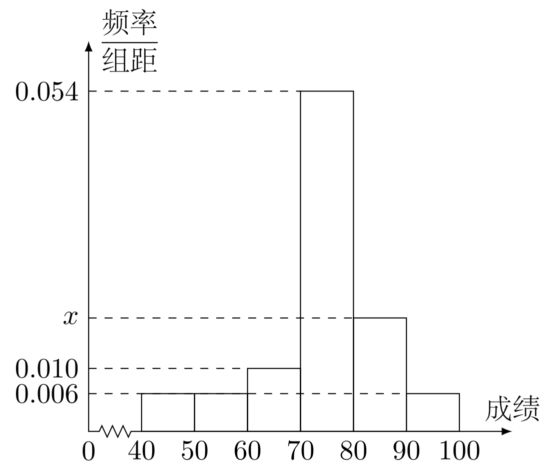
三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=2\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ (其中 $\omega>0$, $x\in\mathbf{R}$) 的最小正周期为 10π.

(1) 求 ω 的值;

(2) 设 α, $\beta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f\left(5\alpha+\dfrac{5}{3}\pi\right)=-\dfrac{6}{5}$, $f\left(5\beta-\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{16}{17}$, 求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

17. 某班 50 位学生期中考试数学成绩的频率分布直方图如图所示, 其中成绩分组区间是: $[40,50)$, $[50,60)$, $[60,70)$, $[70,80)$, $[80,90)$, $[90,100]$.



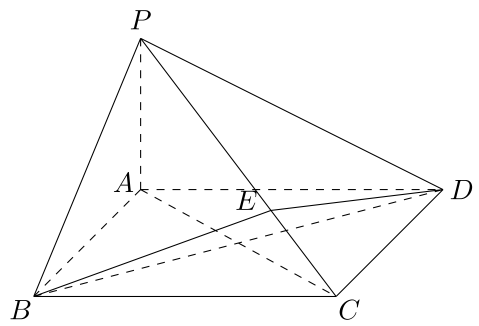
(1) 求图中 x 的值;

(2) 从成绩不低于 80 分的学生中随机选取 2 人, 该 2 人中成绩在 90 分以上 (含 90 分) 的人数记为 ξ, 求 ξ 的数学期望.

18. 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 点 E 在线段 PC 上, $PC\perp$ 平面 BDE.

(1) 证明: $BD\perp$ 平面 PAC;

(2) 若 $PA=1$, $AD=2$, 求二面角 $B-PC-A$ 的正切值.



19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 满足 $2S_n=a_{n+1}-2^{n+1}+1$, $n\in\mathbf{N}^*$, 且 a_1, a_2+5, a_3 成等差数列.

(1) 求 a_1 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 证明: 对一切正整数 n, 有 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{2}$.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率 $e=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, 且椭圆 C 上的点到点 $Q(0,2)$ 的距离的最大值为 3.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 在椭圆 C 上, 是否存在点 $M(m,n)$, 使得直线 l: $mx+ny=1$ 与圆 O: $x^2+y^2=1$ 相交于不同的两点 A, B, 且 $\triangle OAB$ 的面积最大? 若存在, 求出点 M 的坐标及相对应的 $\triangle OAB$ 的面积; 若不存在, 请说明理由.

21. 设 $a<1$, 集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\mid 2x^2-3(1+a)x+6a>0\}$, $D=A\cap B$.

(1) 求集合 D (用区间表示);

(2) 求函数 $f(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$ 在 D 内的极值点.