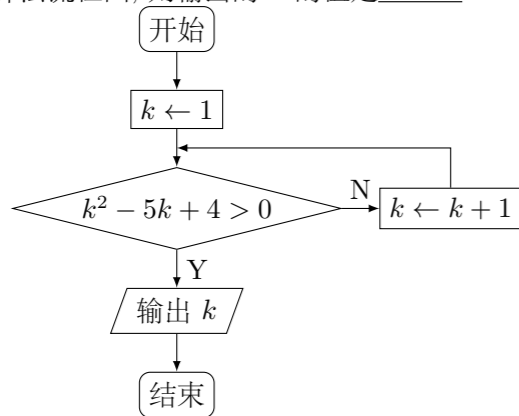


## 2012 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

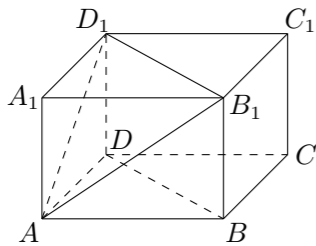
### 一、填空题

1. 已知集合  $A = \{1, 2, 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$ , 则  $A \cup B =$ \_\_\_\_\_.
2. 某学校高一、高二、高三年级的学生人数之比是  $3:3:4$ , 现用分层抽样的方法从该校高中三个年级的学生中抽取容量为 50 的样本, 则应从高二年级抽取\_\_\_\_\_名学生.
3. 设  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a + bi = \frac{11 - 7i}{1 - 2i}$  ( $i$  为虚数单位), 则  $a + b$  的值为\_\_\_\_\_.

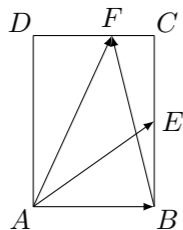
4. 如图是一个算法流程图, 则输出的  $k$  的值是\_\_\_\_\_.



5. 函数  $f(x) = \sqrt{1 - 2\log_6 x}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
6. 现有 10 个数, 它们能构成一个以 1 为首项,  $-3$  为公比的等比数列, 若从这 10 个数中随机抽取一个数, 则它小于 8 的概率是\_\_\_\_\_.
7. 如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = AD = 3$  cm,  $AA_1 = 2$  cm, 则四棱锥  $A - BB_1D_1D$  的体积为\_\_\_\_\_  $\text{cm}^3$ .



8. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 若双曲线  $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{m^2 + 4} = 1$  的离心率为  $\sqrt{5}$ , 则  $m$  的值为\_\_\_\_\_.
9. 如图, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $BC = 2$ , 点  $E$  为  $BC$  的中点, 点  $F$  在边  $CD$  上, 若  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \sqrt{2}$ , 则  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$  的值是\_\_\_\_\_.



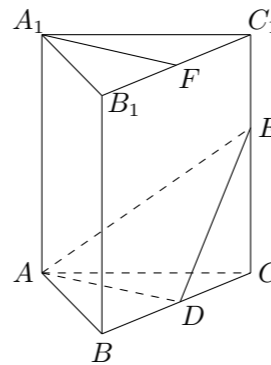
10. 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上且周期为 2 的函数, 且在区间  $[-1, 1]$  上,  $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{bx + 2}{x + 1}, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$  其中  $a, b \in \mathbf{R}$ . 若  $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)$ , 则  $a + 3b$  的值为\_\_\_\_\_.

11. 设  $\alpha$  为锐角, 若  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5}$ , 则  $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right)$  的值为\_\_\_\_\_.
12. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 圆  $C$  的方程为  $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$ , 若直线  $y = kx - 2$  上至少存在一点, 使得以该点为圆心, 1 为半径的圆与圆  $C$  有公共点, 则  $k$  的最大值是\_\_\_\_\_.
13. 已知函数  $f(x) = x^2 + ax + b$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 的值域为  $[0, +\infty)$ , 若关于  $x$  的不等式  $f(x) < c$  的解集为  $(m, m + 6)$ , 则实数  $c$  的值为\_\_\_\_\_.
14. 已知正数  $a, b, c$  满足  $5c - 3a \leq b \leq 4c - a$ ,  $c \ln b \geq a + c \ln c$ , 则  $\frac{b}{a}$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

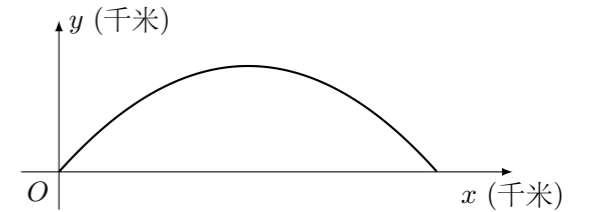
### 二、解答题

15. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .
  - (1) 求证:  $\tan B = 3 \tan A$ ;
  - (2) 若  $\cos C = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 求  $A$  的值.

16. 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $A_1B_1 = A_1C_1$ ,  $D, E$  分别是棱  $BC, CC_1$  上的点 (点  $D$  不同于点  $C$ ), 且  $AD \perp DE$ ,  $F$  为  $B_1C_1$  的中点. 求证:
  - (1) 平面  $ADE \perp$  平面  $BCC_1B_1$ ;
  - (2) 直线  $A_1F \parallel$  平面  $ADE$ .

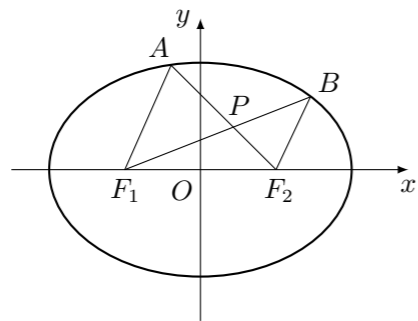


17. 如图, 建立平面直角坐标系  $xOy$ ,  $x$  轴在地平面上,  $y$  轴垂直于地平面, 单位长度为 1 千米, 某炮位于坐标原点. 已知炮弹发射后的轨迹在方程  $y = kx - \frac{1}{20}(1 + k^2)x^2$  ( $k > 0$ ) 表示的曲线上, 其中  $k$  与发射方向有关. 炮的射程是指炮弹落地点的横坐标.
  - (1) 求炮的最大射程;
  - (2) 设在第一象限有一飞行物 (忽略其大小), 其飞行高度为 3.2 千米, 试问它的横坐标  $a$  不超过多少时, 炮弹可以击中它? 请说明理由.



18. 若函数  $y = f(x)$  在  $x = x_0$  处取得极大值或极小值, 则称  $x_0$  为函数  $y = f(x)$  的极值点. 已知  $a, b$  是实数, 1 和  $-1$  是函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  的两个极值点.
  - (1) 求  $a$  和  $b$  的值;
  - (2) 设函数  $g(x)$  的导函数  $g'(x) = f(x) + 2$ , 求  $g(x)$  的极值点;
  - (3) 设  $h(x) = f(f(x)) - c$ , 其中  $c \in [-2, 2]$ , 求函数  $y = h(x)$  的零点个数.

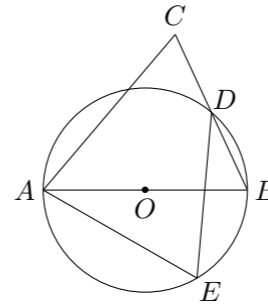
19. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ , 已知点  $(1, e)$  和  $(e, \frac{\sqrt{3}}{2})$  都在椭圆上, 其中  $e$  为椭圆的离心率.
- (1) 求椭圆的方程;
- (2) 设  $A, B$  是椭圆上位于  $x$  轴上方的两点, 且直线  $AF_1$  与直线  $BF_2$  平行,  $AF_2$  与  $BF_1$  交于点  $P$ .
- ① 若  $AF_1 - BF_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , 求直线  $AF_1$  的斜率;
- ② 求证:  $PF_1 + PF_2$  是定值.



20. 已知各项均为正数的两个数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  满足:  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, n \in \mathbf{N}^*$ .
- (1) 设  $b_{n+1} = 1 + \frac{b_n}{a_n}, n \in \mathbf{N}^*$ , 求证: 数列  $\left\{ \left( \frac{b_n}{a_n} \right)^2 \right\}$  是等差数列;
- (2) 设  $b_{n+1} = \sqrt{2} \cdot \frac{b_n}{a_n}, n \in \mathbf{N}^*$ , 且  $\{a_n\}$  是等比数列, 求  $a_1$  和  $b_1$  的值.

21. 四选二.

【A】如图,  $AB$  是圆  $O$  的直径,  $D, E$  为圆  $O$  上位于  $AB$  异侧的两点, 连接  $BD$  并延长至点  $C$ , 使  $BD = DC$ , 连接  $AC, AE, DE$ . 求证:  $\angle E = \angle C$ .



【B】已知矩阵  $A$  的逆矩阵  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ , 求矩阵  $A$  的特征值.

【C】在极坐标系中, 已知圆  $C$  经过点  $P(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ , 圆心为直线  $\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  与极轴的交点, 求圆  $C$  的极坐标方程.

【D】已知实数  $x, y$  满足:  $|x + y| < \frac{1}{3}, |2x - y| < \frac{1}{6}$ , 求证:  $|y| < \frac{5}{18}$ .

22. 设  $\xi$  为随机变量, 从棱长为 1 的正方体的 12 条棱中任取两条, 当两条棱相交时,  $\xi = 0$ ; 当两条棱平行时,  $\xi$  的值为两条棱之间的距离; 当两条棱异面时,  $\xi = 1$ .
- (1) 求概率  $P(\xi = 0)$ ;
- (2) 求  $\xi$  的分布列, 并求其数学期望  $E(\xi)$ .

23. 设集合  $P_n = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbf{N}^*$ . 记  $f(n)$  为同时满足下列条件的集合  $A$  的个数: ①  $A \subseteq P_n$ ; ② 若  $x \in A$ , 则  $2x \notin A$ ; ③ 若  $x \in \complement_{P_n} A$ , 则  $2x \notin \complement_{P_n} A$ .
- (1) 求  $f(4)$ ;
- (2) 求  $f(n)$  的解析式 (用  $n$  表示).