

2012 普通高等学校招生考试 (江西卷理)

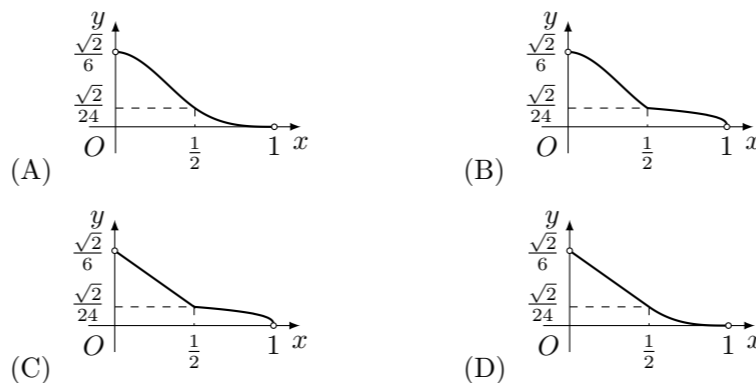
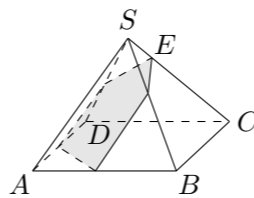
一、选择题

- 若集合 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{0, 2\}$, 则集合 $\{z \mid z = x + y, x \in A, y \in B\}$ 中的元素的个数为 ()
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2
- 下列函数中, 与函数 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 定义域相同的函数为 ()
(A) $y = \frac{1}{\sin x}$ (B) $y = \frac{\ln x}{x}$ (C) $y = xe^x$ (D) $y = \frac{\sin x}{x}$
- 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ \lg x, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f(f(10)) =$ ()
(A) $\lg 101$ (B) 2 (C) 1 (D) 0
- 若 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 4$, 则 $\sin 2\theta =$ ()
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$
- 下列命题中, 假命题为 ()
(A) 存在四边相等的四边形不是正方形
(B) $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, $z_1 + z_2$ 为实数的充分必要条件是 z_1, z_2 互为共轭复数
(C) 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $x + y > 2$, 则 x, y 至少有一个大于 1
(D) 对于任意 $n \in \mathbf{N}_+$, $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ 都是偶数
- 观察下列各式: $a + b = 1, a^2 + b^2 = 3, a^3 + b^3 = 4, a^4 + b^4 = 7, a^5 + b^5 = 11, \dots$, 则 $a^{10} + b^{10} =$ ()
(A) 28 (B) 76 (C) 123 (D) 199
- 在直角三角形 ABC 中, 点 D 是斜边 AB 的中点, 点 P 为线段 CD 的中点, 则 $\frac{|PA|^2 + |PB|^2}{|PC|^2} =$ ()
(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 10
- 某农户计划种植黄瓜和韭菜, 种植面积不超过 50 亩, 投入资金不超过 54 万元, 假设种植黄瓜和韭菜的产量、成本和售价如下表

	年产量/亩	年种植成本/亩	每吨售价
黄瓜	4 吨	1.2 万元	0.55 万元
韭菜	6 吨	0.9 万元	0.3 万元

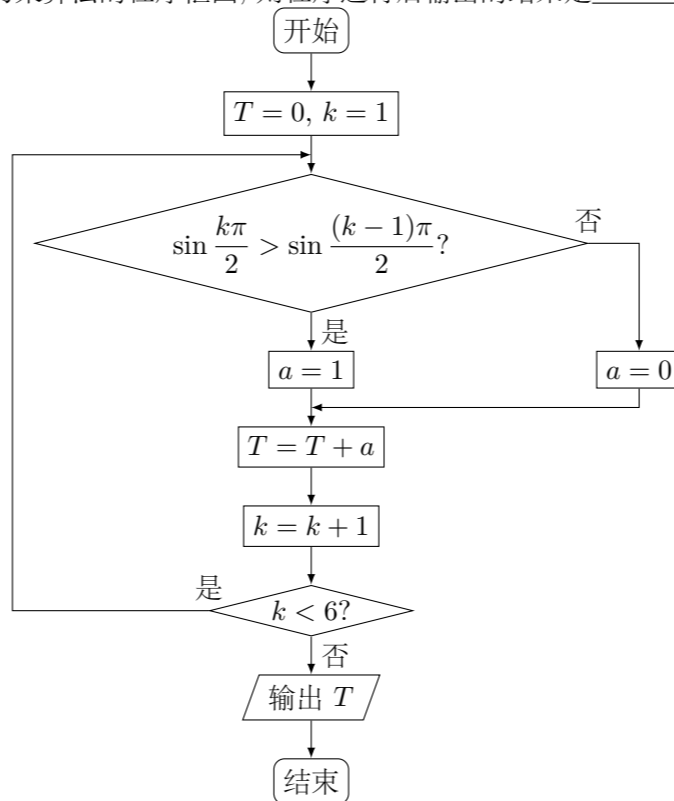
为使一年的种植总利润 (总利润 = 总销售收入 - 总种植成本) 最大, 那么黄瓜和韭菜的种植面积 (单位: 亩) 分别为 ()
(A) 50, 0 (B) 30, 20 (C) 20, 30 (D) 0, 50
- 样本 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的平均数为 \bar{x} , 样本 (y_1, y_2, \dots, y_m) 的平均数为 \bar{y} ($\bar{x} \neq \bar{y}$). 若样本 $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ 的平均数 $\bar{z} = \alpha \bar{x} + (1 - \alpha) \bar{y}$, 其中 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, 则 n, m 的大小关系为 ()
(A) $n < m$ (B) $n > m$ (C) $n = m$ (D) 不能确定

- 如图, 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 所有棱长都为 1, 点 E 是侧棱 SC 上一动点, 过点 E 垂直于 SC 的截面将正四棱锥分成上、下两部分. 记 $SE = x$ ($0 < x < 1$), 截面下面部分的体积为 $V(x)$, 则函数 $y = V(x)$ 的图象大致为 ()



二、填空题

- 计算定积分 $\int_{-1}^1 (x^2 + \sin x) dx =$ _____.
- 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等差数列, 若 $a_1 + b_1 = 7, a_3 + b_3 = 21$, 则 $a_5 + b_5 =$ _____.
- 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右顶点分别是 A, B , 左、右焦点分别是 F_1, F_2 . 若 $|AF_1|, |F_1F_2|, |F_1B|$ 成等比数列, 则此椭圆的离心率为 _____.
- 如图为某算法的程序框图, 则程序运行后输出的结果是 _____.

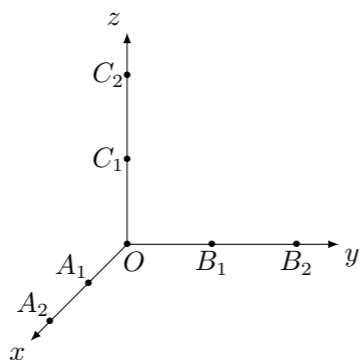


- 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, 以原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 则曲线 C 的极坐标方程为 _____.
- 在实数范围内, 不等式 $|2x - 1| + |2x + 1| \leq 6$ 的解集为 _____.

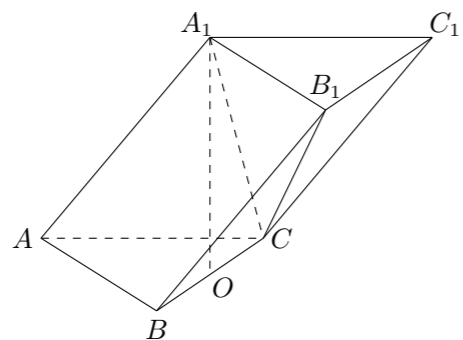
三、解答题

- 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -\frac{1}{2}n^2 + kn$ (其中 $k \in \mathbf{N}_+$), 且 S_n 的最大值为 8.
(1) 确定常数 k , 并求 a_n ;
(2) 求数列 $\left\{ \frac{9 - 2a_n}{2^n} \right\}$ 的前 n 项和 T_n .
- 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $A = \frac{\pi}{4}$, $b \sin\left(\frac{\pi}{4} + C\right) - c \sin\left(\frac{\pi}{4} + B\right) = a$.
(1) 求证: $B - C = \frac{\pi}{2}$;
(2) 若 $a = \sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 如图, 从 $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(2, 0, 0)$, $B_1(0, 1, 0)$, $B_2(0, 2, 0)$, $C_1(0, 0, 1)$, $C_2(0, 0, 2)$ 这 6 个点中随机选取 3 个点, 将这 3 个点及原点 O 两两相连构成一个“立体”, 记该“立体”的体积为随机变量 V (如果选取的 3 个点与原点在同一平面内, 此时“立体”的体积 $V = 0$).
- (1) 求 $V = 0$ 的概率;
 (2) 求 V 的分布列及数学期望 EV .



20. 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AB = AC = AA_1 = \sqrt{5}$, $BC = 4$, 点 A_1 在底面 ABC 的射影是线段 BC 的中点 O .
- (1) 证明: 在侧棱 AA_1 上存在一点 E , 使得 $OE \perp$ 平面 BB_1C_1C , 并求出 AE 的长;
 (2) 求平面 A_1B_1C 与平面 BB_1C_1C 夹角的余弦值.



21. 已知三点 $O(0, 0)$, $A(-2, 1)$, $B(2, 1)$, 曲线 C 上任意一点 $M(x, y)$ 满足 $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = \overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + 2$.
- (1) 求曲线 C 的方程;
 (2) 动点 $Q(x_0, y_0)$ ($-2 < x_0 < 2$) 在曲线 C 上, 曲线 C 在点 Q 处的切线为 l . 问: 是否存在定点 $P(0, t)$ ($t < 0$), 使得 l 与 PA, PB 都相交, 交点分别为 D, E , 且 $\triangle QAB$ 与 $\triangle PDE$ 的面积之比是常数? 若存在, 求 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. 若函数 $h(x)$ 满足
- ① $h(0) = 1, h(1) = 0$;
 - ② 对任意 $a \in [0, 1]$, 有 $h(h(a)) = a$;
 - ③ 在 $(0, 1)$ 上单调递减.
- 则称 $h(x)$ 为补函数. 已知函数 $h(x) = \left(\frac{1-x^p}{1+\lambda x^p}\right)^{\frac{1}{p}}$ ($\lambda > -1, p > 0$).
- (1) 判断函数 $h(x)$ 是否为补函数, 并证明你的结论;
 (2) 若存在 $m \in [0, 1]$, 使 $h(m) = m$, 称 m 是函数 $h(x)$ 的中介元. 记 $p = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbf{N}_+$) 时 $h(x)$ 的中介元为 x_n , 且 $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$, 若对任意的 $n \in \mathbf{N}_+$, 都有 $S_n < \frac{1}{2}$, 求 λ 的取值范围;
 (3) 当 $\lambda = 0, x \in (0, 1)$ 时, 函数 $y = h(x)$ 的图象总在直线 $y = 1 - x$ 的上方, 求 p 的取值范围.