

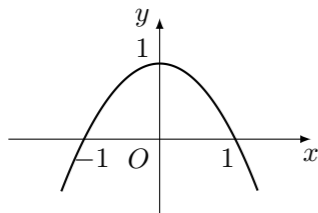
## 2012 普通高等学校招生考试 (湖北卷理)

### 一、选择题

1. 方程  $x^2 + 6x + 13 = 0$  的一个根是 ( )  
 (A)  $-3 + 2i$  (B)  $3 + 2i$  (C)  $-2 + 3i$  (D)  $2 + 3i$

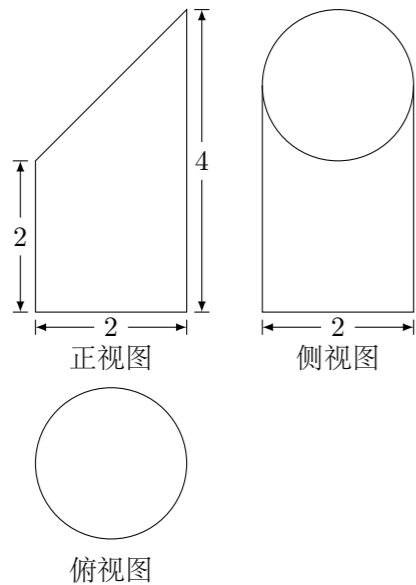
2. 命题“ $\exists x_0 \in \mathbb{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}, x_0^3 \in \mathbf{Q}$ ”的否定是 ( )  
 (A)  $\exists x_0 \notin \mathbb{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}, x_0^3 \in \mathbf{Q}$  (B)  $\exists x_0 \in \mathbb{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}, x_0^3 \notin \mathbf{Q}$   
 (C)  $\forall x \notin \mathbb{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}, x^3 \in \mathbf{Q}$  (D)  $\forall x \in \mathbb{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}, x^3 \notin \mathbf{Q}$

3. 已知二次函数  $y = f(x)$  的图象如图所示, 则它与  $x$  轴所围成的图形的面积为 ( )



- (A)  $\frac{2\pi}{5}$  (B)  $\frac{4}{3}$  (C)  $\frac{3}{2}$  (D)  $\frac{\pi}{2}$

4. 已知某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )



- (A)  $\frac{8\pi}{3}$  (B)  $3\pi$  (C)  $\frac{10\pi}{3}$  (D)  $6\pi$

5. 设  $a \in \mathbf{Z}$ , 且  $0 \leq a < 13$ , 若  $51^{2012} + a$  能被 13 整除, 则  $a =$  ( )  
 (A) 0 (B) 1 (C) 11 (D) 12

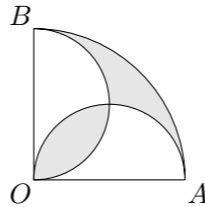
6. 设  $a, b, c, x, y, z$  是正数, 且  $a^2 + b^2 + c^2 = 10, x^2 + y^2 + z^2 = 40,$   
 $ax + by + cz = 20$ , 则  $\frac{a+b+c}{x+y+z} =$  ( )

- (A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{3}{4}$

7. 定义在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上的函数  $f(x)$ , 如果对于任意给定的等比数列  $\{a_n\}, \{f(a_n)\}$  仍是等比数列, 则称  $f(x)$  为“保等比数列函数”. 现有定义在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上的如下函数:  
 ①  $f(x) = x^2$ ; ②  $f(x) = 2^x$ ; ③  $f(x) = \sqrt{|x|}$ ; ④  $f(x) = \ln|x|$ .  
 则其中是“保等比数列函数”的  $f(x)$  的序号为 ( )

- (A) ①② (B) ③④ (C) ①③ (D) ②④

8. 如图, 在圆心角为直角的扇形  $OAB$  中, 分别以  $OA, OB$  为直径作两个半圆. 在扇形  $OAB$  内随机取一点, 则此点取自阴影部分的概率是 ( )



- (A)  $1 - \frac{2}{\pi}$  (B)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$  (C)  $\frac{2}{\pi}$  (D)  $\frac{1}{\pi}$

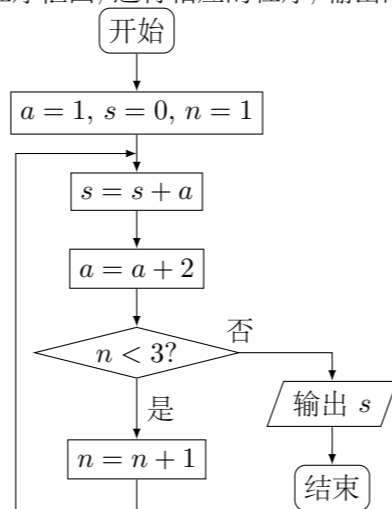
9. 函数  $f(x) = x \cos x^2$  在区间  $[0, 4]$  上的零点个数为 ( )  
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

10. 我国古代数学名著《九章算术》中“开立圆术”曰: 置积尺数, 以十六乘之, 九而一, 所得开立方除之, 即立圆径. “开立圆术”相当于给出了已知球的体积  $V$ , 求其直径  $d$  的一个近似公式  $d \approx \sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$ . 人们还用过一些类似的近似公式. 根据  $\pi = 3.14159 \dots$  判断, 下列近似公式中最精确的一个是 ( )  
 (A)  $d \approx \sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$  (B)  $d \approx \sqrt[3]{2V}$  (C)  $d \approx \sqrt[3]{\frac{300}{157}V}$  (D)  $d \approx \sqrt[3]{\frac{21}{11}V}$

### 二、填空题

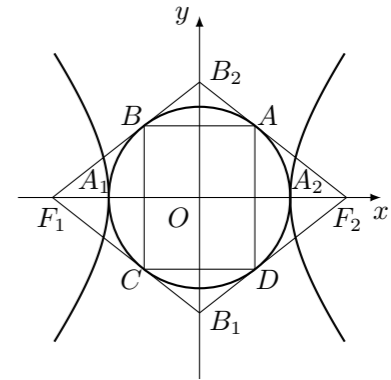
11. 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 若  $(a+b-c)(a+b+c) = ab$ , 则角  $C =$ \_\_\_\_\_.

12. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果  $s =$ \_\_\_\_\_.

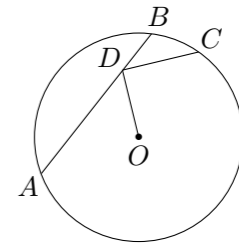


13. 回文数是指从左到右读与从右到左读都一样的正整数. 如 22, 121, 3443, 94249 等. 显然 2 位回文数有 9 个: 11, 22, 33,  $\dots$ , 99; 3 位回文数有 90 个: 101, 111, 121,  $\dots$ , 191, 202,  $\dots$ , 999. 则  
 (1) 4 位回文数有\_\_\_\_\_个;  
 (2)  $2n+1$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 位回文数有\_\_\_\_\_个.

14. 如图, 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a, b > 0$ ) 的两顶点为  $A_1, A_2$ , 虚轴两端点为  $B_1, B_2$ , 两焦点为  $F_1, F_2$ . 若以  $A_1A_2$  为直径的圆内切于菱形  $F_1B_1F_2B_2$ , 切点分别为  $A, B, C, D$ . 则  
 (1) 双曲线的离心率  $e =$ \_\_\_\_\_;  
 (2) 菱形  $F_1B_1F_2B_2$  的面积  $S_1$  与矩形  $ABCD$  的面积  $S_2$  的比值  $\frac{S_1}{S_2} =$ \_\_\_\_\_.



15. 如图, 点  $D$  在  $\odot O$  的弦  $AB$  上移动,  $AB = 4$ , 连接  $OD$ , 过点  $D$  作  $OD$  的垂线交  $\odot O$  于点  $C$ , 则  $CD$  的最大值为\_\_\_\_\_.



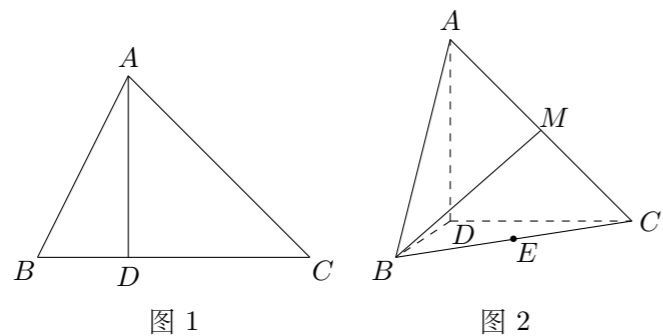
16. 在直角坐标系  $xOy$  中, 以原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 已知射线  $\theta = \frac{\pi}{4}$  与曲线  $\begin{cases} x = t + 1, \\ y = (t - 1)^2, \end{cases}$  ( $t$  为参数) 相交于  $A, B$  两点, 则线段  $AB$  的中点的直角坐标为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17. 已知向量  $\mathbf{a} = (\cos \omega x - \sin \omega x, \sin \omega x)$ ,  $\mathbf{b} = (-\cos \omega x - \sin \omega x, 2\sqrt{3} \cos \omega x)$ , 设函数  $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \lambda$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 的图象关于直线  $x = \pi$  对称, 其中  $\omega, \lambda$  为常数, 且  $\omega \in (\frac{1}{2}, 1)$ .  
 (1) 求函数  $f(x)$  的最小正周期;  
 (2) 若  $y = f(x)$  的图象经过点  $(\frac{\pi}{4}, 0)$ , 求函数  $f(x)$  在区间  $[0, \frac{3\pi}{5}]$  上的取值范围.

18. 已知等差数列  $\{a_n\}$  前三项的和为  $-3$ , 前三项的积为  $8$ .
- (1) 求等差数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
  - (2) 若  $a_2, a_3, a_1$  成等比数列, 求数列  $\{|a_n|\}$  的前  $n$  项和.

19. 如图 1,  $\angle ACB = 45^\circ$ ,  $BC = 3$ , 过动点  $A$  作  $AD \perp BC$ , 垂足  $D$  在线段  $BC$  上且异于点  $B$ , 连接  $AB$ , 沿  $AD$  将  $\triangle ABD$  折起, 使  $\angle BDC = 90^\circ$  (如图 2 所示).
- (1) 当  $BD$  的长为多少时, 三棱锥  $A-BCD$  的体积最大;
  - (2) 当三棱锥  $A-BCD$  的体积最大时, 设点  $E, M$  分别为棱  $BC, AC$  的中点, 试在棱  $CD$  上确定一点  $N$ , 使得  $EN \perp BM$ , 并求  $EN$  与平面  $BMN$  所成角的大小.



20. 根据以往的经验, 某工程施工期间的降水量  $X$  (单位: mm) 对工期的影响如下表:

降水量 $X$	$X < 300$	$300 \leq X < 700$	$700 \leq X < 900$	$X \geq 900$
工期延误天数 $Y$	0	2	6	10

历年气象资料表明, 该工程施工期间降水量  $X$  小于  $300, 700, 900$  的概率分别为  $0.3, 0.7, 0.9$ . 求:

- (1) 工期延误天数  $Y$  的均值与方差;
- (2) 在降水量  $X$  至少是  $300$  的条件下, 工期延误不超过  $6$  天的概率.

21. 设  $A$  是单位圆  $x^2 + y^2 = 1$  上的任意一点,  $l$  是过点  $A$  与  $x$  轴垂直的直线,  $D$  是直线  $l$  与  $x$  轴的交点, 点  $M$  在直线  $l$  上, 且满足  $|DM| = m|DA|$  ( $m > 0$  且  $m \neq 1$ ). 当点  $A$  在圆上运动时, 记点  $M$  的轨迹为曲线  $C$ .
- (1) 求曲线  $C$  的方程, 判断曲线  $C$  为何种圆锥曲线, 并求其焦点坐标;
  - (2) 过原点且斜率为  $k$  的直线交曲线  $C$  于  $P, Q$  两点, 其中  $P$  在第一象限, 它在  $y$  轴上的射影为点  $N$ , 直线  $QN$  交曲线  $C$  于另一点  $H$ . 是否存在  $m$ , 使得对任意的  $k > 0$ , 都有  $PQ \perp PH$ ? 若存在, 求  $m$  的值; 若不存在, 请说明理由.

22. (1) 已知函数  $f(x) = rx - x^r + (1-r)$  ( $x > 0$ ), 其中  $r$  为有理数, 且  $0 < r < 1$ , 求  $f(x)$  的最小值;
- (2) 试用 (1) 的结果证明如下命题: 设  $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, b_1, b_2$  为正有理数. 若  $b_1 + b_2 = 1$ , 则  $a_1^{b_1} a_2^{b_2} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2$ ;
- (3) 请将 (2) 中的命题推广到一般形式, 并用数学归纳法证明你所推广的命题.
- 注: 当  $\alpha$  为正有理数时, 有求导公式  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ .