2012 普通高等学校招生考试 (湖南卷文)

一、选择题

1. 设集合 $M=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $N=\{x \mid x^2=x\}$, 则 $M\cap N=$ ( )

(A) $\{-1,\ 0,\ 1\}$ (B) $\{0,\ 1\}$ (C) $\{1\}$ (D) $\{0\}$

2. 复数 $z=\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)$ (i 为虚数单位) 的共轭复数是 ( )

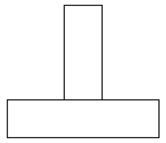
(A) $-1-\mathrm{i}$ (B) $-1+\mathrm{i}$ (C) $1-\mathrm{i}$ (D) $1+\mathrm{i}$

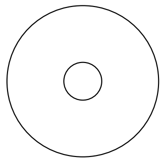
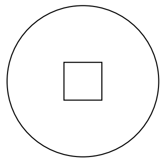
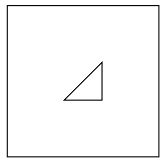
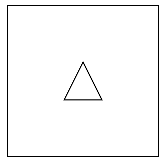
3. 命题"若 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\tan\alpha=1$"的逆否命题是 ( )

(A) 若 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\tan\alpha\neq 1$ (B) 若 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\tan\alpha\neq 1$

(C) 若 $\tan\alpha\neq 1$, 则 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}$ (D) 若 $\tan\alpha\neq 1$, 则 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

4. 某几何体的正视图和侧视图均如下图所示, 则该几何体的俯视图不可能是 ( )



(A)  (B)  (C)  (D) 

5. 设某大学的女生体重 y (单位: kg) 与身高 x (单位: cm) 具有线性相关关系, 根据一组样本数据 (x_i,y_i) $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 用最小二乘法建立的回归方程为 $\hat{y}=0.85x-85.71$, 则下列结论中不正确的是 ( )

(A) y 与 x 具有正的线性相关关系

(B) 回归直线过样本点的中心 $(\overline{x},\overline{y})$

(C) 若该大学某女生身高增加 1 cm, 则其体重约增加 0.85 kg

(D) 若该大学某女生身高为 170 cm, 则可断定其体重必为 58.79 kg

6. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦距为 10, 点 $P(2,1)$ 在 C 的渐近线上, 则 C 的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{80}-\dfrac{y^2}{20}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{80}=1$

7. 设 $a>b>1$, $c<0$, 给出下列三个结论:
① $\dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}$; ② $a^c<b^c$; ③ $\log_b(a-c)>\log_a(b-c)$.
其中所有正确结论的序号是 ( )

(A) ① (B) ①② (C) ②③ (D) ①②③

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=\sqrt{7}$, $BC=2$, $B=60^\circ$, 则 BC 边上的高等于 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{39}}{4}$

9. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 是最小正周期为 2π 的偶函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数. 当 $x\in[0,\pi]$ 时, $0<f(x)<1$; 当 $x\in(0,\pi)$ 且 $x\neq\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)f'(x)>0$, 则函数 $y=f(x)-\sin x$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 上的零点个数为 ( )

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 8

二、填空题

10. 在极坐标系中, 曲线 C_1: $\rho\left(\sqrt{2}\cos\theta+\sin\theta\right)=1$ 与曲线 C_2: $\rho=a\ (a>0)$ 的一个交点在极轴上, 则 $a=$______.

11. 某制药企业为了对某种药用液体进行生物测定, 需要优选培养温度, 试验范围定为 $29^\circ\mathrm{C}\sim 63^\circ\mathrm{C}$, 精确度要求 $\pm 1^\circ\mathrm{C}$. 用分数法进行优选时, 能保证找到最佳培养温度需要的最少试验次数为______.

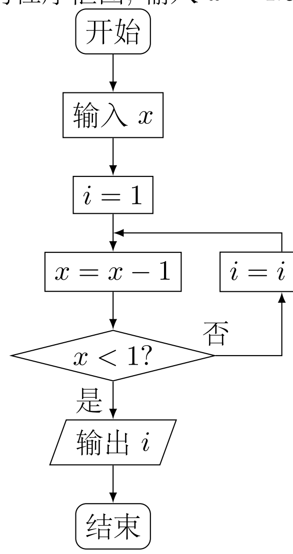
12. 不等式 $x^2-5x+6\leqslant 0$ 的解集为______.

13. 如图是某学校一名篮球运动员在五场比赛中所得分数的茎叶图, 则该运动员在这五场比赛中得分的方差为______.

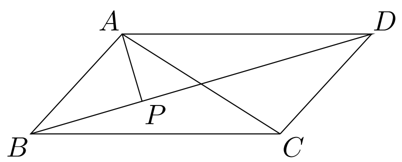
0	8 9
1	0 3 5

(注: 方差 $s^2=\dfrac{1}{n}\left[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right]$, 其中 $\overline{x}$ 为 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的平均数)

14. 如果执行如图所示的程序框图, 输入 $x=4.5$, 则输出的数 $i=$______.



15. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AP\perp BD$, 垂足为 P, 且 $AP=3$, 则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=$______.



16. 对于 $n\in\mathbf{N}^*$, 将 n 表示为 $n=a_k\times 2^k+a_{k-1}\times 2^{k-1}+\cdots+a_1\times 2^1+a_0\times 2^0$, 当 $i=k$ 时, $a_i=1$, 当 $0\leqslant i\leqslant k-1$ 时, a_i 为 0 或 1. 定义 b_n 如下: 在 n 的上述表示中, 当 a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_k 中等于 1 的个数为奇数时, $b_n=1$; 否则 $b_n=0$.

(1) $b_2+b_4+b_6+b_8=$______;

(2) 记 c_m 为数列 $\{b_n\}$ 中第 m 个为 0 的项与第 $m+1$ 个为 0 的项之间的项数, 则 c_m 的最大值是______.

三、解答题

17. 某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息, 安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据, 如下表所示.

一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数 (人)	x	30	25	y	10
结算时间 (分钟/人)	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

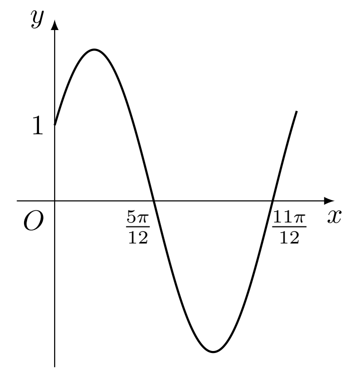
(1) 确定 x, y 的值, 并估计顾客一次购物的结算时间的平均值;

(2) 求一位顾客一次购物的结算时间不超过 2 分钟的概率. (将频率视为概率)

18. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(x\in\mathbf{R},\ \omega>0,\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

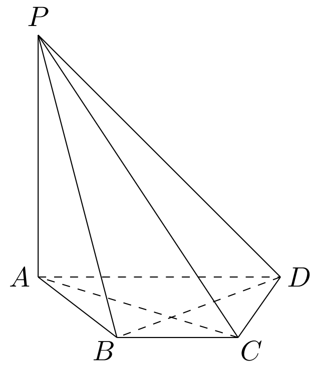
(2) 求函数 $g(x)=f\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)-f\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的单调递增区间.



19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $AD\parallel BC$, $AC\perp BD$.

(1) 证明: $BD\perp PC$;

(2) 若 $AD=4$, $BC=2$, 直线 PD 与平面 PAC 所成的角为 $30°$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



20. 某公司一下属企业从事某种高科技产品的生产. 该企业第一年年初有资金 2000 万元, 将其投入生产, 到当年年底资金增长了 50%, 预计以后每年资金年增长率与第一年的相同. 公司要求企业从第一年开始, 每年年底上缴资金 d 万元, 并将剩余资金全部投入下一年生产. 设第 n 年年底企业上缴资金后的剩余资金为 a_n 万元.

(1) 用 d 表示 a_1, a_2, 并写出 a_{n+1} 与 a_n 的关系式;

(2) 若公司希望经过 m $(m\geqslant 3)$ 年使企业的剩余资金为 4000 万元, 试确定企业每年上缴资金 d 的值 (用 m 表示).

21. 在直角坐标系 xOy 中, 已知中心在原点, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$ 的椭圆 E 的一个焦点为圆 C: $x^2+y^2-4x+2=0$ 的圆心.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设 P 是椭圆 E 上一点, 过 P 作两条斜率之积为 $\dfrac{1}{2}$ 的直线 l_1, l_2, 当直线 l_1, l_2 都与圆 C 相切时, 求 P 的坐标.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$, 其中 $a>0$.

(1) 若对一切 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)\geqslant 1$ 恒成立, 求 a 的取值集合;

(2) 在函数 $f(x)$ 的图象上取定两点 $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ $(x_1<x_2)$, 记直线 AB 的斜率为 k, 证明: 存在 $x_0\in(x_1,x_2)$, 使 $f'(x_0)=k$ 成立.