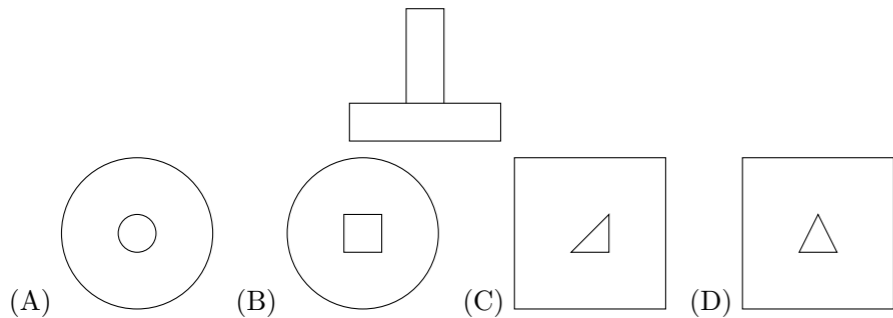


2012 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

一、选择题

1. 设集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{x \mid x^2 \leq x\}$, 则 $M \cap N =$ ()
 (A) $\{0\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{-1, 1\}$ (D) $\{-1, 0, 1\}$
2. 命题“若 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha = 1$ ”的逆否命题是 ()
 (A) 若 $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha \neq 1$ (B) 若 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha \neq 1$
 (C) 若 $\tan \alpha \neq 1$, 则 $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ (D) 若 $\tan \alpha \neq 1$, 则 $\alpha = \frac{\pi}{4}$
3. 某几何体的正视图和侧视图均如下图所示, 则该几何体的俯视图不可能是 ()

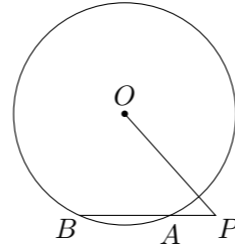


4. 设某大学的女生体重 y (单位: kg) 与身高 x (单位: cm) 具有线性相关关系, 根据一组样本数据 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$), 用最小二乘法建立的回归方程为 $\hat{y} = 0.85x - 85.71$, 则下列结论中不正确的是 ()
 (A) y 与 x 具有正的线性相关关系
 (B) 回归直线过样本点的中心 (\bar{x}, \bar{y})
 (C) 若该大学某女生身高增加 1 cm, 则其体重约增加 0.85 kg
 (D) 若该大学某女生身高为 170 cm, 则可断定其体重必为 58.79 kg
5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦距为 10, 点 $P(2, 1)$ 在 C 的渐近线上, 则 C 的方程为 ()
 (A) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ (B) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ (C) $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$ (D) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{80} = 1$
6. 函数 $f(x) = \sin x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值域为 ()
 (A) $[-2, 2]$ (B) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ (C) $[-1, 1]$ (D) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $AC = 3$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 1$, 则 $BC =$ ()
 (A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{7}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{23}$
8. 已知两条直线 $l_1: y = m$ 和 $l_2: y = \frac{8}{2m+1}$ ($m > 0$), l_1 与函数 $y = |\log_2 x|$ 的图象从左至右相交于点 A, B , l_2 与函数 $y = |\log_2 x|$ 的图象从左至右

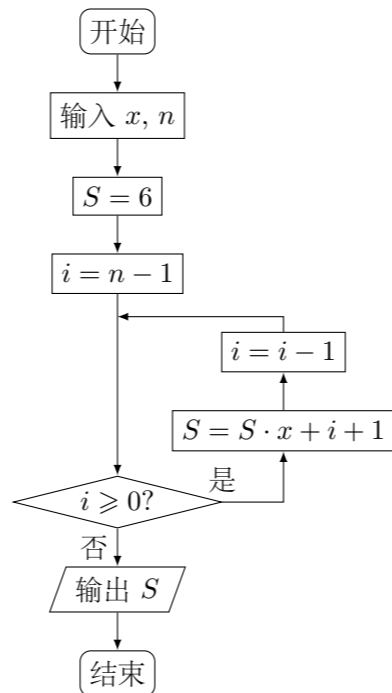
交于点 C, D . 记线段 AC 和 BD 在 x 轴上的投影长度分别为 a, b . 当 m 变化时, $\frac{b}{a}$ 的最小值为 ()
 (A) $16\sqrt{2}$ (B) $8\sqrt{2}$ (C) $8\sqrt[3]{4}$ (D) $4\sqrt[3]{4}$

二、填空题

9. 在直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 $C_1: \begin{cases} x = t + 1, \\ y = 1 - 2t, \end{cases}$ (t 为参数) 与曲线 $C_2: \begin{cases} x = a \sin \theta, \\ y = 3 \cos \theta, \end{cases}$ (θ 为参数, $a > 0$) 有一个公共点在 x 轴上, 则 $a =$ _____.
10. 不等式 $|2x + 1| - 2|x - 1| > 0$ 的解集为_____.
11. 如图, 过点 P 的直线与 $\odot O$ 相交于 A, B 两点. 若 $PA = 1$, $AB = 2$, $PO = 3$, 则 $\odot O$ 的半径等于_____.

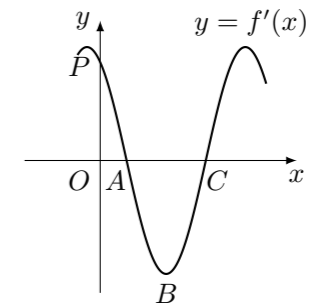


12. 已知复数 $z = (3 + i)^2$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$ _____.
13. $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项为_____. (用数字作答)
14. 如果执行如图所示的程序框图, 输入 $x = -1$, $n = 3$, 则输出的数 $S =$ _____.



15. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的部分图象如图所示, 其中, P 为图象与 y 轴的交点, A, C 为图象与 x 轴的两个交点, B 为图象的最低点.

- (1) 若 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 点 P 的坐标为 $\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 $\omega =$ _____;
- (2) 若在曲线段 \widehat{ABC} 与 x 轴所围成的区域内随机取一点, 则该点在 $\triangle ABC$ 内的概率为_____.



16. 设 $N = 2^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$), 将 N 个数 x_1, x_2, \dots, x_N 依次放入编号为 1, 2, \dots, N 的 N 个位置, 得到排列 $P_0 = x_1 x_2 \dots x_N$. 将该排列中分别位于奇数与偶数位置的数取出, 并按原顺序依次放入对应的前 $\frac{N}{2}$ 和后 $\frac{N}{2}$ 个位置, 得到排列 $P_1 = x_1 x_3 \dots x_{N-1} x_2 x_4 \dots x_N$, 将此操作称为 C 变换. 将 P_1 分成两段, 每段 $\frac{N}{2}$ 个数, 并对每段作 C 变换, 得到 P_2 ; 当 $2 \leq i \leq n - 2$ 时, 将 P_i 分成 2^i 段, 每段 $\frac{N}{2^i}$ 个数, 并对每段作 C 变换, 得到 P_{i+1} . 例如, 当 $N = 8$ 时, $P_2 = x_1 x_5 x_3 x_7 x_2 x_6 x_4 x_8$, 此时 x_7 位于 P_2 中的第 4 个位置.
 (1) 当 $N = 16$ 时, x_7 位于 P_2 中的第_____个位置;
 (2) 当 $N = 2^n$ ($n \geq 8$) 时, x_{173} 位于 P_4 中的第_____个位置.

三、解答题

17. 某超市为了了解顾客的购物量及结算时间等信息, 安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据, 如下表所示.

一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数 (人)	x	30	25	y	10
结算时间 (分钟/人)	1	1.5	2	2.5	3

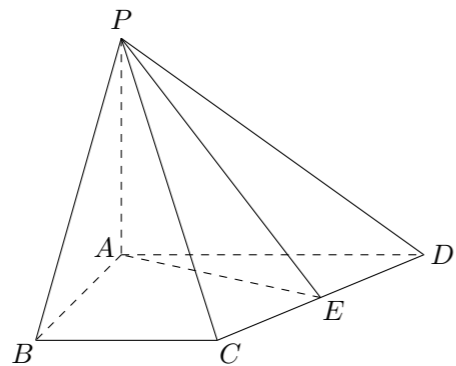
已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

- (1) 确定 x, y 的值, 并求顾客一次购物的结算时间 X 的分布列与数学期望;
- (2) 若某顾客到达收银台时前面恰有 2 位顾客需结算, 且各顾客的结算相互独立, 求该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率. (注: 将频率视为概率)

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB = 4$, $BC = 3$, $AD = 5$, $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$, E 是 CD 的中点.

(1) 证明: $CD \perp$ 平面 PAE ;

(2) 若直线 PB 与平面 PAE 所成的角和 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角相等, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 $A(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B(n) = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}$, $C(n) = a_3 + a_4 + \cdots + a_{n+2}$, $n = 1, 2, \cdots$.

(1) 若 $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, 且对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 三个数 $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ 组成等差数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列的充分必要条件是: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 三个数 $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ 组成公比为 q 的等比数列.

20. 某企业接到生产 3000 台某产品的 A, B, C 三种部件的订单, 每台产品需要这三种部件的数量分别为 2, 2, 1 (单位: 件). 已知每个工人每天可生产 A 部件 6 件, 或 B 部件 3 件, 或 C 部件 2 件, 该企业计划安排 200 名工人分成三组分别生产这三种部件, 生产 B 部件的人数与生产 A 部件的人数成正比, 比例系数为 k (k 为正整数).

(1) 设生产 A 部件的人数为 x , 分别写出完成 A, B, C 三种部件生产需要的时间;

(2) 假设这三种部件的生产同时开工, 试确定正整数 k 的值, 使完成订单任务的时间最短, 并给出时间最短时具体的人数分组方案.

21. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 上的点均在圆 $C_2: (x-5)^2 + y^2 = 9$ 外, 且对 C_1 上任意一点 M , M 到直线 $x = -2$ 的距离等于该点与圆 C_2 上点的距离的最小值.

(1) 求曲线 C_1 的方程;

(2) 设 $P(x_0, y_0)$ ($y_0 \neq \pm 3$) 为圆 C_2 外一点, 过 P 作圆 C_2 的两条切线, 分别与曲线 C_1 相交于点 A, B 和 C, D . 证明: 当 P 在直线 $x = -4$ 上运动时, 四点 A, B, C, D 的纵坐标之积为定值.

22. 已知函数 $f(x) = e^{ax} - x$, 其中 $a \neq 0$.

(1) 若对一切 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 1$ 恒成立, 求 a 的取值集合;

(2) 在函数 $f(x)$ 的图象上取定两点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ ($x_1 < x_2$), 记直线 AB 的斜率为 k . 问: 是否存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$, 使 $f'(x_0) > k$ 成立? 若存在, 求 x_0 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.