2012 普通高等学校招生考试 (重庆卷理)

一、选择题

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=1$, $a_4=5$, 则 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5=$ ( )

(A) 7 (B) 15 (C) 20 (D) 25

2. 不等式 $\dfrac{x-1}{2x+1}\leqslant 0$ 的解集为 ( )

(A) $\left(-\dfrac{1}{2},1\right]$ (B) $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$

(C) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup[1,+\infty)$ (D) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$

3. 对任意的实数 k, 直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置关系一定是( )

(A) 相离 (B) 相切

(C) 相交但直线不过圆心 (D) 相交且直线过圆心

4. $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中常数项为 ( )

(A) $\dfrac{35}{16}$ (B) $\dfrac{35}{8}$ (C) $\dfrac{35}{4}$ (D) 105

5. 设 $\tan\alpha$, $\tan\beta$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的两根, 则 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值为( )

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

6. 设 $x, y\in\mathbf{R}$, 向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,y)$, $\boldsymbol{c}=(2,-4)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$ ( )

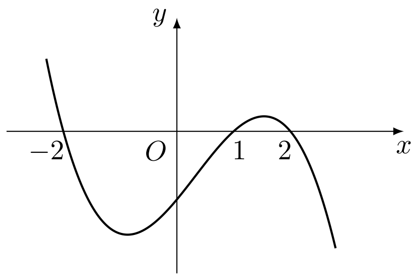
(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) 10

7. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且以 2 为周期, 则"$f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的增函数"是"$f(x)$ 为 $[3,4]$ 上的减函数"的 ( )

(A) 既不充分也不必要的条件 (B) 充分而不必要的条件

(C) 必要而不充分的条件 (D) 充要条件

8. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 其导函数为 $f'(x)$, 且函数 $y=(1-x)f'(x)$ 的图象如图所示, 则下列结论中一定成立的是 ( )



(A) 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$

(B) 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$

(C) 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$

(D) 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$

9. 设四面体的六条棱的长分别为 1, 1, 1, 1, $\sqrt{2}$ 和 a, 且长为 a 的棱与长为 $\sqrt{2}$ 的棱异面, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $(0,\sqrt{2})$ (B) $(0,\sqrt{3})$ (C) $(1,\sqrt{2})$ (D) $(1,\sqrt{3})$

10. 设平面点集 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,(y-x)\left(y-\dfrac{1}{x}\right)\geqslant 0\right\}$, $B=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1\}$, 则 $A\cap B$ 所表示的平面图形的面积为 ( )

(A) $\dfrac{3}{4}\pi$ (B) $\dfrac{3}{5}\pi$ (C) $\dfrac{4}{7}\pi$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

二、填空题

11. 若 $(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=a+b\mathrm{i}$, 其中 $a, b\in\mathbf{R}$, i 为虚数单位, 则 $a+b=$______.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+5n}-n}=$______.

13. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 且 $\cos A=\dfrac{3}{5}$, $\cos B=\dfrac{5}{13}$, $b=3$, 则 $c=$______.

14. 过抛物线 $y^2=2x$ 的焦点 F 作直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 若 $|AB|=\dfrac{25}{12}$, $|AF|<|BF|$, 则 $|AF|=$______.

15. 某艺校在一天的 6 节课中随机安排语文、数学、外语三门文化课和其他三门艺术课各 1 节, 则在课表上的相邻两节文化课之间最多间隔 1 节艺术课的概率为______. (用数字作答)

三、解答题

16. 设 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{3}{2}x+1$, 其中 $a\in\mathbf{R}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于 y 轴.

(1) 求 a 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的极值.

17. 甲、乙两人轮流投篮, 每人每次投一球. 约定甲先投且先投中者获胜, 一直到有人获胜或每人都已投球 3 次时投篮结束. 设甲每次投篮投中的概率为 $\dfrac{1}{3}$, 乙每次投篮投中的概率为 $\dfrac{1}{2}$, 且各次投篮互不影响.

(1) 求甲获胜的概率;

(2) 求投篮结束时甲的投篮次数 ξ 的分布列与期望.

18. 设 $f(x)=4\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\omega x-\cos(2\omega x+\pi)$, 其中 $\omega>0$.

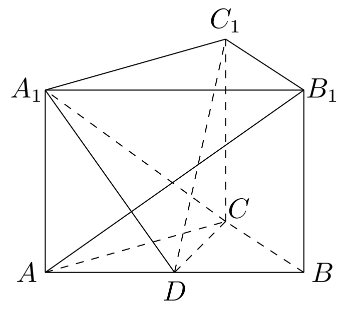
(1) 求函数 $y=f(x)$ 的值域;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数, 求 ω 的最大值.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=4$, $AC=BC=3$, D 为 AB 的中点.

(1) 求点 C 到平面 A_1ABB_1 的距离;

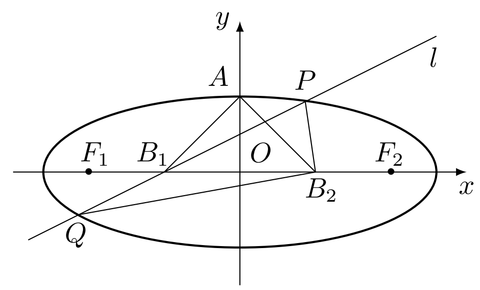
(2) 若 $AB_1 \perp A_1C$, 求二面角 A_1-CD-C_1 的平面角的余弦值.



20. 如图, 设椭圆的中心为原点 O, 长轴在 x 轴上, 上顶点为 A, 左、右焦点分别为 F_1, F_2, 线段 OF_1, OF_2 的中点分别为 B_1, B_2, 且 $\triangle AB_1B_2$ 是面积为 4 的直角三角形.

(1) 求该椭圆的离心率和标准方程;

(2) 过 B_1 作直线 l 交椭圆于 P, Q 两点, 使 $PB_2 \perp QB_2$, 求直线 l 的方程.



21. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1}=a_2S_n+a_1$, 其中 $a_2 \neq 0$.

(1) 求证: $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列;

(2) 若 $a_2>-1$, 求证: $S_n \leqslant \dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$, 并给出等号成立的充要条件.