2012 普通高等学校招生考试 (陕西卷理)

一、选择题

1. 集合 $M=\{x \mid \lg x>0\}$, $N=\{x \mid x^2 \leqslant 4\}$, 则 $M \cap N=$ ( )

(A) $(1,2)$　(B) $[1,2)$　(C) $(1,2]$　(D) $[1,2]$

2. 下列函数中, 既是奇函数又是增函数的为 ( )

(A) $y=x+1$　(B) $y=-x^3$　(C) $y=\dfrac{1}{x}$　(D) $y=x|x|$

3. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位, 则"$ab=0$"是"复数 $a+\dfrac{b}{\mathrm{i}}$ 为纯虚数"的 ( )

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

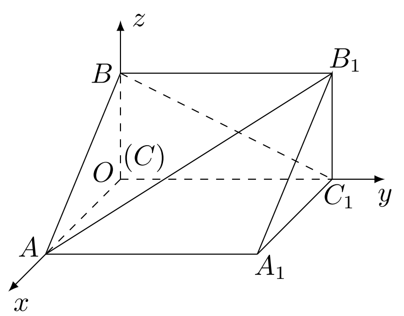
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 已知圆 C: $x^2+y^2-4x=0$, l 是过点 $P(3,0)$ 的直线, 则 ( )

(A) l 与 C 相交　(B) l 与 C 相切

(C) l 与 C 相离　(D) 以上三个选项均有可能

5. 如图, 在空间直角坐标系中有直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, $CA=CC_1=2CB$, 则直线 BC_1 与直线 AB_1 夹角的余弦值为 ( )



(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　(C) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　(D) $\dfrac{3}{5}$

6. 从甲、乙两个城市分别随机抽取 16 台自动售货机, 对其销售额进行统计, 统计数据用茎叶图表示 (如图所示). 设甲、乙两组数据的平均数分别为 $\overline{x}$, $\overline{x}$, 中位数分别为 $m_{甲}$, $m_{乙}$, 则 ( )

甲		乙
8 6 5	0	
8 8 4 0 0	1	0 2 8
7 5 2	2	0 2 3 3 7
8 0 0	3	1 2 4 4 8
3 1	4	2 3 8

(A) $\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$, $m_{甲}>m_{乙}$　(B) $\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$, $m_{甲}<m_{乙}$

(C) $\overline{x}_{甲}>\overline{x}_{乙}$, $m_{甲}>m_{乙}$　(D) $\overline{x}_{甲}>\overline{x}_{乙}$, $m_{甲}<m_{乙}$

7. 设函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$, 则 ( )

(A) $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点　(B) $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(C) $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极大值点　(D) $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

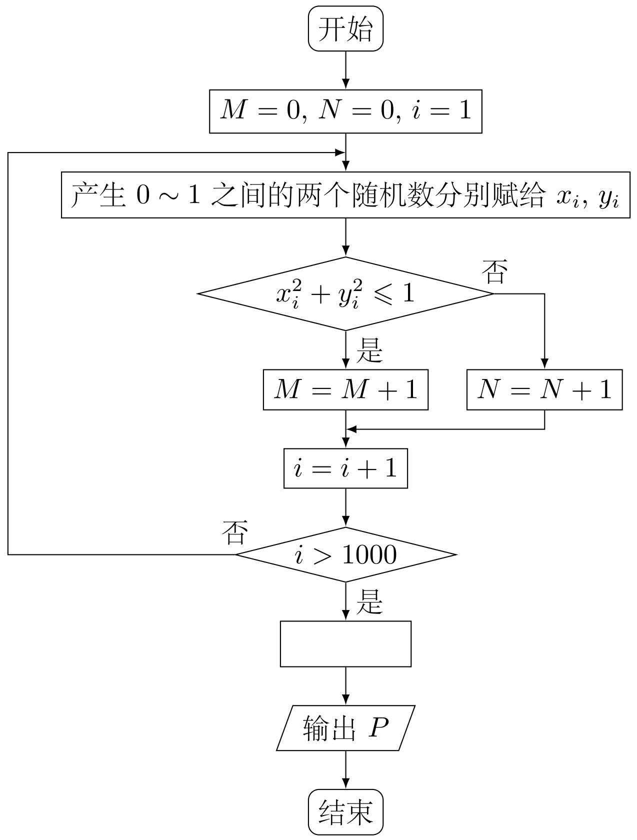
8. 两人进行乒乓球比赛, 先赢 3 局者获胜, 决出胜负为止, 则所有可能出现的情形 (各人输赢局次的不同视为不同情形) 共有 ( )

(A) 10 种　(B) 15 种　(C) 20 种　(D) 30 种

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c, 若 $a^2+b^2=2c^2$, 则 $\cos C$ 的最小值为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $-\dfrac{1}{2}$

10. 如图所示是用模拟方法估计圆周率 π 值的程序框图, P 表示估计结果, 则图中空白框内应填入 ( )



(A) $P=\dfrac{N}{1000}$　(B) $P=\dfrac{4N}{1000}$　(C) $P=\dfrac{M}{1000}$　(D) $P=\dfrac{4M}{1000}$

二、填空题

11. 观察下列不等式:

$1+\dfrac{1}{2^2}<\dfrac{3}{2}$,

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}<\dfrac{5}{3}$,

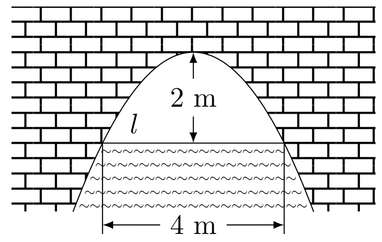
$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}<\dfrac{7}{4}$,

……

照此规律, 第五个不等式为______.

12. $(a+x)^5$ 展开式中 x^2 的系数为 10, 则实数 a 的值为______.

13. 如图是抛物线形拱桥, 当水面在 l 时, 拱顶离水面 2 米, 水面宽 4 米, 水位下降 1 米后, 水面宽______米.

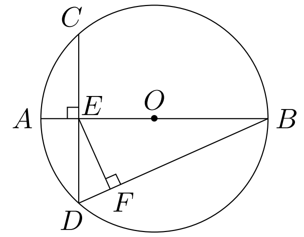


14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ -2x-1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ D 是由 x 轴和曲线 $y=f(x)$ 及该曲线在点 $(1,0)$ 处的切线所围成的封闭区域, 则 $z=x-2y$ 在 D 上的最大值为______.

15. 三选一.

【A】若存在实数 x 使 $|x-a|+|x-1| \leqslant 3$ 成立, 则实数 a 的取值范围是______.

【B】如图, 在圆 O 中, 直径 AB 与弦 CD 垂直, 垂足为 E, $EF \perp DB$, 垂足为 F, 若 $AB=6$, $AE=1$, 则 $DF \cdot DB=$______.



【C】直线 $2\rho\cos\theta=1$ 与圆 $\rho=2\cos\theta$ 相交的弦长为______.

三、解答题

16. 函数 $f(x)=A\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$ $(A>0,\ \omega>0)$ 的最大值为 3, 其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设 $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=2$, 求 α 的值.

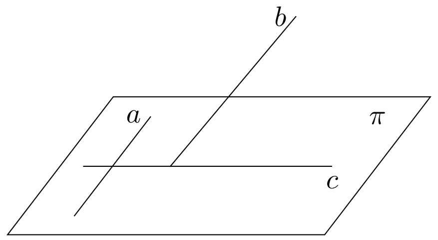
17. 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列, 其前 n 项和为 S_n, 且 a_5, a_3, a_4 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的公比;

(2) 证明: 对任意 $k \in \mathbf{N}_+$, S_{k+2}, S_k, S_{k+1} 成等差数列.

18. (1) 如图, 证明命题“a 是平面 π 内的一条直线, b 是 π 外的一条直线 (b 不垂直于 π), c 是直线 b 在 π 上的投影, 若 $a \perp b$, 则 $a \perp c$”为真;

(2) 写出上述命题的逆命题, 并判断其真假 (不需证明).



19. 已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 椭圆 C_2 以 C_1 的长轴为短轴, 且与 C_1 有相同的离心率.

(1) 求椭圆 C_2 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 点 A, B 分别在椭圆 C_1 和 C_2 上, $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$, 求直线 AB 的方程.

20. 某银行柜台设有一个服务窗口, 假设顾客办理业务所需的时间互相独立, 且都是整数分钟, 对以往顾客办理业务所需的时间统计结果如下:

办理业务所需的时间 (分)	1	2	3	4	5
频率	0.1	0.4	0.3	0.1	0.1

从第一个顾客开始办理业务时计时.

(1) 估计第三个顾客恰好等待 4 分钟开始办理业务的概率;

(2) X 表示至第 2 分钟末已办理完业务的顾客人数, 求 X 的分布列及数学期望.

21. 设函数 $f_n(x) = x^n + bx + c$ ($n \in \mathbf{N}_+$, b, $c \in \mathbf{R}$).

(1) 设 $n \geqslant 2$, $b = 1$, $c = -1$, 证明: $f_n(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 内存在唯一零点;

(2) 设 $n = 2$, 若对任意 x_1, $x_2 \in [-1, 1]$, 有 $|f_2(x_1) - f_2(x_2)| \leqslant 4$, 求 b 的取值范围;

(3) 在 (1) 的条件下, 设 x_n 是 $f_n(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 内的零点, 判断数列 x_2, x_3, $\cdots$, x_n, $\cdots$ 的增减性.