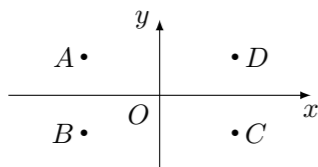


## 2013 普通高等学校招生考试 (四川卷理)

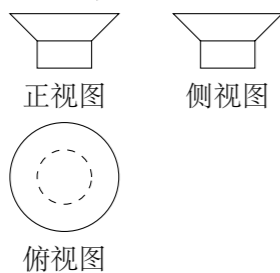
### 一、选择题

1. 设集合  $A = \{x \mid x + 2 = 0\}$ , 集合  $B = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
 (A)  $\{-2\}$  (B)  $\{2\}$  (C)  $\{-2, 2\}$  (D)  $\emptyset$
2. 如图, 在复平面内, 点  $A$  表示复数  $z$ , 则表示  $z$  的共轭复数的点是 ( )



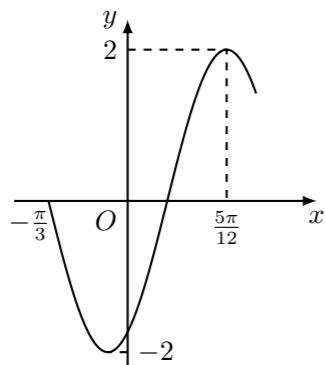
- (A)  $A$  (B)  $B$  (C)  $C$  (D)  $D$

3. 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的直观图可以是 ( )



4. 设  $x \in \mathbf{Z}$ , 集合  $A$  是奇数集, 集合  $B$  是偶数集. 若命题  $p: \forall x \in A, 2x \in B$ , 则 ( )  
 (A)  $\neg p: \forall x \in A, 2x \notin B$  (B)  $\neg p: \forall x \notin A, 2x \notin B$   
 (C)  $\neg p: \exists x \notin A, 2x \in B$  (D)  $\neg p: \exists x \in A, 2x \notin B$

5. 函数  $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 则  $\omega, \varphi$  的值分别是 ( )

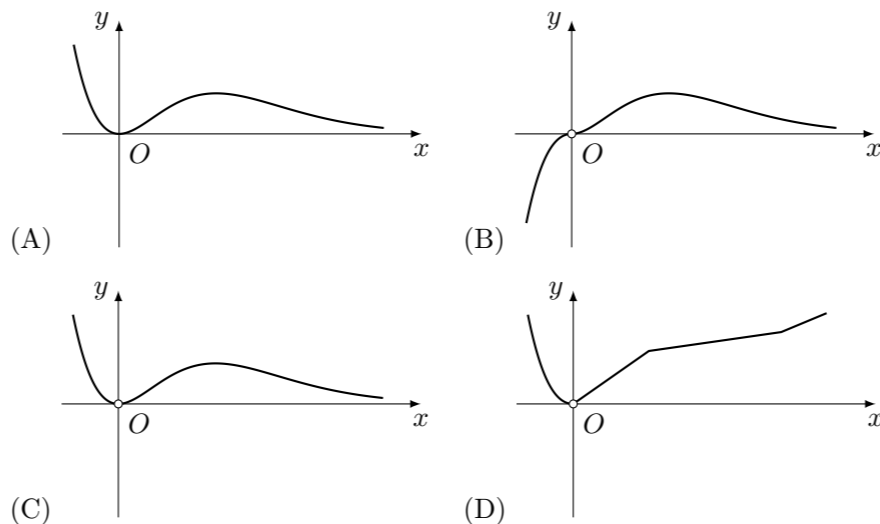


- (A)  $2, -\frac{\pi}{3}$  (B)  $2, -\frac{\pi}{6}$  (C)  $4, -\frac{\pi}{6}$  (D)  $4, \frac{\pi}{3}$

6. 抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点到双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的渐近线的距离是 ( )

- (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)  $1$  (D)  $\sqrt{3}$

7. 函数  $y = \frac{x^3}{3^x - 1}$  的图象大致是 ( )



8. 从  $1, 3, 5, 7, 9$  这五个数中, 每次取出两个不同的数分别为  $a, b$ , 共可得到  $\lg a - \lg b$  的不同值的个数是 ( )

- (A)  $9$  (B)  $10$  (C)  $18$  (D)  $20$

9. 节日前夕, 小李在家门前的树上挂了两串彩灯, 这两串彩灯的第一次闪亮相互独立, 且都在通电后的  $4$  秒内任一时刻等可能发生, 然后每串彩灯以  $4$  秒为间隔闪亮. 那么这两串彩灯同时通电后, 它们第一次闪亮的时刻相差不超过  $2$  秒的概率是 ( )

- (A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{3}{4}$  (D)  $\frac{7}{8}$

10. 设函数  $f(x) = \sqrt{e^x + x - a}$  ( $a \in \mathbf{R}$ ,  $e$  为自然对数的底数). 若曲线  $y = \sin x$  上存在  $(x_0, y_0)$  使得  $f(f(y_0)) = y_0$ , 则  $a$  的取值范围是 ( )

- (A)  $[1, e]$  (B)  $[e^{-1} - 1, 1]$   
 (C)  $[1, 1 + e]$  (D)  $[e^{-1} - 1, e + 1]$

### 二、填空题

11. 二项式  $(x + y)^5$  的展开式中, 含  $x^2 y^3$  的项的系数是\_\_\_\_\_. (用数字作答)
12. 在平行四边形  $ABCD$  中, 对角线  $AC$  与  $BD$  交于点  $O$ ,  $\vec{AB} + \vec{AD} = \lambda \vec{AO}$ , 则  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.
13. 设  $\sin 2\alpha = -\sin \alpha$ ,  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 则  $\tan 2\alpha$  的值是\_\_\_\_\_.
14. 已知  $f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的偶函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x^2 - 4x$ , 那么, 不等式  $f(x + 2) < 5$  的解集是\_\_\_\_\_.
15. 设  $P_1, P_2, \dots, P_n$  为平面  $\alpha$  内的  $n$  个点, 在平面  $\alpha$  内的所有点中, 若点  $P$  到  $P_1, P_2, \dots, P_n$  点的距离之和最小, 则称点  $P$  为  $P_1, P_2, \dots, P_n$  点的一个“中位点”. 例如, 线段  $AB$  上的任意点都是端点  $A, B$  的中位点. 则有下列命题:  
 ① 若三个点  $A, B, C$  共线,  $C$  在线段  $AB$  上, 则  $C$  是  $A, B, C$  的中位点;  
 ② 直角三角形斜边的中点是该直角三角形三个顶点的中位点;  
 ③ 若四个点  $A, B, C, D$  共线, 则它们的中位点存在且唯一;  
 ④ 梯形对角线的交点是该梯形四个顶点的唯一中位点.  
 其中的真命题是\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

### 三、解答题

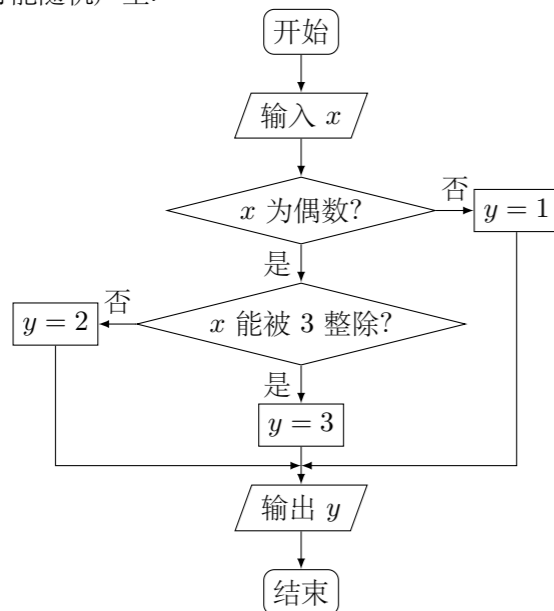
16. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 + a_3 = 8$ , 且  $a_4$  为  $a_2$  和  $a_9$  的等比中项, 求数列  $\{a_n\}$  的首项、公差及前  $n$  项和.

17. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $2\cos^2 \frac{A-B}{2} \cos B -$

$$\sin(A-B) \sin B + \cos(A+C) = -\frac{3}{5}.$$

- (1) 求  $\cos A$  的值;  
 (2) 若  $a = 4\sqrt{2}, b = 5$ , 求向量  $\vec{BA}$  在  $\vec{BC}$  方向上的投影.

18. 某算法的程序框图如图所示, 其中输入的变量  $x$  在  $1, 2, 3, \dots, 24$  这 24 个整数中等可能随机产生.



- (1) 分别求出按程序框图正确编程运行时输出  $y$  的值为  $i$  的概率  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ );  
 (2) 甲、乙两同学依据自己对程序框图的理解, 各自编写程序重复运行  $n$  次后, 统计记录了输出  $y$  的值为  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的频数. 以下是甲、乙所作频数统计表的部分数据.

甲的频数统计表 (部分)

运行次数 $n$	输出 $y$ 的值为 1 的频数	输出 $y$ 的值为 2 的频数	输出 $y$ 的值为 3 的频数
30	14	6	10
...	...	...	...
2100	1027	376	697

乙的频数统计表 (部分)

运行次数 $n$	输出 $y$ 的值为 1 的频数	输出 $y$ 的值为 2 的频数	输出 $y$ 的值为 3 的频数
30	12	11	7
...	...	...	...
2100	1051	696	353

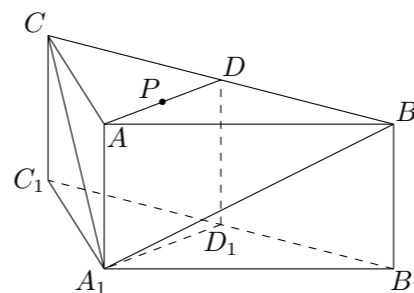
当  $n = 2100$  时, 根据表中的数据, 分别写出甲、乙所编程序各自输出  $y$  的值为  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的频率 (用分数表示), 并判断两位同学中哪一位所编程序符合算法要求的可能性较大;

- (3) 按程序框图正确编写的程序运行 3 次, 求输出  $y$  的值为 2 的次数  $\xi$  的分布列及数学期望.

19. 如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 侧棱  $AA_1 \perp$  底面  $ABC$ ,  $AB = AC = 2AA_1$ ,  $\angle BAC = 120^\circ$ ,  $D, D_1$  分别是线段  $BC, B_1C_1$  的中点,  $P$  是线段  $AD$  的中点.

(1) 在平面  $ABC$  内, 试作出过点  $P$  与平面  $A_1BC$  平行的直线  $l$ , 说明理由, 并证明直线  $l \perp$  平面  $ADD_1A_1$ ;

(2) 设 (1) 中的直线  $l$  交  $AB$  于点  $M$ , 交  $AC$  于点  $N$ , 求二面角  $A - A_1M - N$  的余弦值.



20. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的两个焦点分别为  $F_1(-1, 0)$ ,  $F_2(1, 0)$ , 且椭圆  $C$  经过点  $P\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

- (1) 求椭圆  $C$  的离心率;  
 (2) 设过点  $A(0, 2)$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $M, N$  两点, 点  $Q$  是线段  $MN$  上的点, 且  $\frac{2}{|AQ|^2} = \frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|AN|^2}$ , 求点  $Q$  的轨迹方程.

21. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & x < 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$  其中  $a$  是实数. 设  $A(x_1, f(x_1))$ ,  $B(x_2, f(x_2))$  为该函数图象上的两点, 且  $x_1 < x_2$ .

- (1) 指出函数  $f(x)$  的单调区间;  
 (2) 若函数  $f(x)$  的图象在点  $A, B$  处的切线互相垂直, 且  $x_2 < 0$ , 求  $x_2 - x_1$  的最小值;  
 (3) 若函数  $f(x)$  的图象在点  $A, B$  处的切线重合, 求  $a$  的取值范围.