2013 普通高等学校招生考试 (大纲卷理)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{4,\ 5\}$, $M=\{x\mid x=a+b,\ a\in A,\ b\in B\}$, 则 M 中元素的个数为 ( )

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

2. $\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^3=$ ( )

(A) -8 (B) 8 (C) $-8\mathrm{i}$ (D) $8\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\lambda+1,1)$, $\boldsymbol{n}=(\lambda+2,2)$, 若 $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\perp(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$, 则 $\lambda=$ ( )

(A) -4 (B) -3 (C) -2 (D) -1

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$, 则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 ( )

(A) $(-1,1)$ (B) $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ (C) $(-1,0)$ (D) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

5. 函数 $f(x)=\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ (x>0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{2^x-1}\ (x>0)$ (B) $\dfrac{1}{2^x-1}\ (x\neq 0)$

(C) $2^x-1\ (x\in\mathbf{R})$ (D) $2^x-1\ (x>0)$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1}+a_n=0$, $a_2=-\dfrac{4}{3}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 10 项和等于 ( )

(A) $-6\left(1-3^{-10}\right)$ (B) $\dfrac{1}{9}\left(1-3^{10}\right)$ (C) $3\left(1-3^{-10}\right)$ (D) $3\left(1+3^{-10}\right)$

7. $(1+x)^8(1+y)^4$ 的展开式中 x^2y^2 的系数是 ( )

(A) 56 (B) 84 (C) 112 (D) 168

8. 椭圆 C: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A_1、A_2, 点 P 在 C 上且直线 PA_2 斜率的取值范围是 $[-2,-1]$, 那么直线 PA_1 斜率的取值范围是 ( )

(A) $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$ (B) $\left[\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{4}\right]$ (C) $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ (D) $\left[\dfrac{3}{4},1\right]$

9. 若函数 $f(x)=x^2+ax+\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 是增函数, 则 a 的取值范围是( )

(A) $[-1,0]$ (B) $[-1,+\infty)$ (C) $[0,3]$ (D) $[3,+\infty)$

10. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB$, 则 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值等于 ( )

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

11. 已知抛物线 C: $y^2=8x$ 与点 $M(-2,2)$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, 则 $k=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

12. 已知函数 $f(x)=\cos x\sin 2x$, 下列结论中错误的是 ( )

(A) $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\pi,0)$ 中心对称

(B) $y=f(x)$ 的图象关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

(C) $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $f(x)$ 既是奇函数, 又是周期函数

二、填空题

13. 已知 α 是第三象限角, $\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}$, 则 $\cot\alpha=$______.

14. 6 个人排成一行, 其中甲、乙两人不相邻的不同排法共有______种. (用数字作答)

15. 记不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x+3y\geqslant 4,\\ 3x+y\leqslant 4\end{cases}$ 所表示的平面区域为 D, 若直线 $y=a(x+1)$ 与 D 有公共点, 则 a 的取值范围是______.

16. 已知圆 O 和圆 K 是球 O 的大圆和小圆, 其公共弦长等于球 O 的半径, $OK=\dfrac{3}{2}$, 且圆 O 与圆 K 所在的平面所成的一个二面角为 60°, 则球 O 的表面积等于______.

三、解答题

17. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $S_3=a_2^2$, 且 S_1, S_2, S_4 成等比数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $(a+b+c)(a-b+c)=ac$.

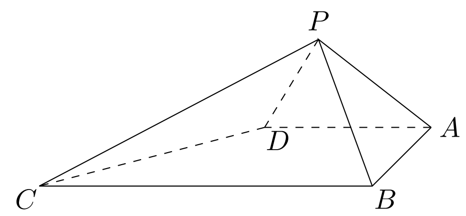
(1) 求 B;

(2) 若 $\sin A\sin C=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$, 求 C.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$, $BC=2AD$, $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAD$ 都是等边三角形.

(1) 证明: $PB\perp CD$;

(2) 求二面角 $A-PD-C$ 的大小.



20. 甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛, 其中两人比赛, 另一人当裁判, 每局比赛结束时, 负的一方在下一局当裁判. 设各局中双方获胜的概率均为 $\dfrac{1}{2}$, 各局比赛的结果都相互独立, 第 1 局甲当裁判.
(1) 求第 4 局甲当裁判的概率;
(2) X 表示前 4 局中乙当裁判的次数, 求 X 的数学期望.

21. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 离心率为 3, 直线 $y=2$ 与 C 的两个交点间的距离为 $\sqrt{6}$.
(1) 求 a、b;
(2) 设过 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 A、B 两点, 且 $|AF_1|=|BF_1|$, 证明: $|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$ 成等比数列.

22. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x(1+\lambda x)}{1+x}$.
(1) 若 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)\leqslant 0$, 求 λ 的最小值;
(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, 证明: $a_{2n}-a_n+\dfrac{1}{4n}>\ln 2$.