2013 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

一、选择题

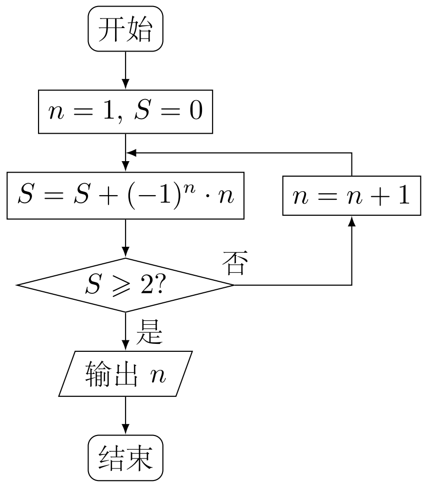
1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x|\leqslant 2\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant 1\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $(-\infty,2]$　(B) $[1,2]$　(C) $[-2,2]$　(D) $[-2,1]$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+y-6\geqslant 0,\\ x-y-2\leqslant 0,\\ y-3\leqslant 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=y-2x$ 的最小值为 ( )

(A) -7　(B) -4　(C) 1　(D) 2

3. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 n 的值为 ( )



(A) 7　(B) 6　(C) 5　(D) 4

4. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, 则"$(a-b)\cdot a^2<0$"是"$a<b$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 已知过点 $P(2,2)$ 的直线与圆 $(x-1)^2+y^2=5$ 相切, 且与直线 $ax-y+1=0$ 垂直, 则 $a=$ ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) 1　(C) 2　(D) $\dfrac{1}{2}$

6. 函数 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 ( )

(A) -1　(B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) 0

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增. 若实数 a 满足 $f(\log_2 a)+f\left(\log_{\frac{1}{2}}a\right)\leqslant 2f(1)$, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $[1,2]$　(B) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　(C) $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$　(D) $(0,2]$

8. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x-2$, $g(x)=\ln x+x^2-3$. 若实数 a, b 满足 $f(a)=0$, $g(b)=0$, 则 ( )

(A) $g(a)<0<f(b)$　(B) $f(b)<0<g(a)$

(C) $0<g(a)<f(b)$　(D) $f(b)<g(a)<0$

二、填空题

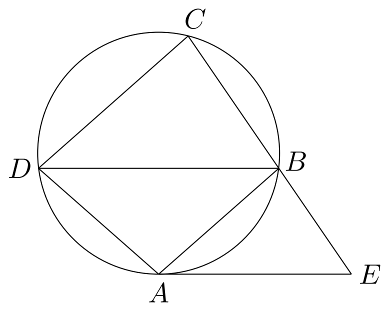
9. i 是虚数单位, 复数 $(3+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=$______.

10. 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上, 若球的体积为 $\dfrac{9\pi}{2}$, 则正方体的棱长为______.

11. 已知抛物线 $y^2=8x$ 的准线过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一个焦点, 且双曲线的离心率为 2, 则该双曲线的方程为______.

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=1$, $\angle BAD=60^\circ$, E 为 CD 的中点. 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$, 则 AB 的长为______.

13. 如图, 在圆内接梯形 $ABCD$ 中, $AB\parallel DC$, 过点 A 作圆的切线与 CB 的延长线交于点 E. 若 $AB=AD=5$, $BE=4$, 则弦 BD 的长为______.



14. 设 $a+b=2$, $b>0$, 则 $\dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{|a|}{b}$ 的最小值为______.

三、解答题

15. 某产品的三个质量指标分别为 x, y, z, 用综合指标 $S=x+y+z$ 评价该产品的等级. 若 $S\leqslant 4$, 则该产品为一等品. 现从一批该产品中, 随机抽取 10 件产品作为样本, 其质量指标列表如下:

产品编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
质量指标 (x,y,z)	$(1,1,2)$	$(2,1,1)$	$(2,2,2)$	$(1,1,1)$	$(1,2,1)$
产品编号	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
质量指标 (x,y,z)	$(1,2,2)$	$(2,1,1)$	$(2,2,1)$	$(1,1,1)$	$(2,1,2)$

(1) 利用上表提供的样本数据估计该批产品的一等品率;

(2) 在该样本的一等品中, 随机抽取 2 件产品.

① 用产品编号列出所有可能的结果;

② 设事件 B 为"在取出的 2 件产品中, 每件产品的综合指标 S 都等于 4", 求事件 B 发生的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c, 已知 $b\sin A=3c\sin B$, $a=3$, $\cos B=\dfrac{2}{3}$.

(1) 求 b 的值;

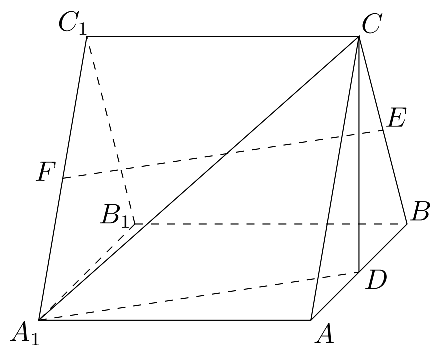
(2) 求 $\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

17. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱 $A_1A\perp$ 底面 ABC, 且各棱长均相等, D, E, F 分别为棱 AB, BC, A_1C_1 的中点.

(1) 证明 $EF\parallel$ 平面 A_1CD;

(2) 证明平面 $A_1CD\perp$ 平面 A_1ABB_1;

(3) 求直线 BC 与平面 A_1CD 所成角的正弦值.



18. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为 F, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设 A, B 分别为椭圆的左、右顶点, 过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点. 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=8$, 求 k 的值.

19. 已知首项为 $\dfrac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 且 $-2S_2$, S_3, $4S_4$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明 $S_n+\dfrac{1}{S_n}\leqslant\dfrac{13}{6}\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

20. 设 $a\in[-2,0]$, 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-(a+5)x, & x\leqslant 0,\\ x^3-\dfrac{a+3}{2}x^2+ax, & x>0.\end{cases}$

(1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内单调递减, 在区间 $(1,+\infty)$ 内单调递增;

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $P_i(x_i,f(x_i))\ (i=1,\ 2,\ 3)$ 处的切线相互平行, 且 $x_1x_2x_3\neq 0$, 证明: $x_1+x_2+x_3>-\dfrac{1}{3}$.