

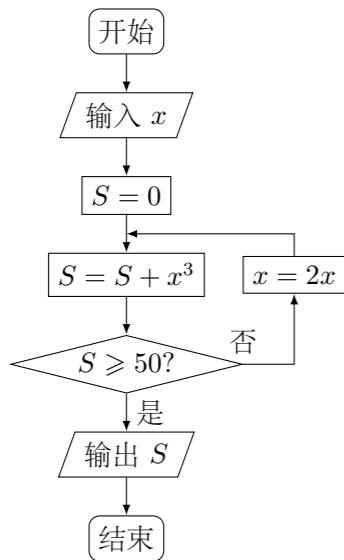
2013 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 (A) $(-\infty, 2]$ (B) $[1, 2]$ (C) $[-2, 2]$ (D) $[-2, 1]$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x + y - 6 \geq 0, \\ x - y - 2 \leq 0, \\ y - 3 \leq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = y - 2x$ 的最小值为 ()
 (A) -7 (B) -4 (C) 1 (D) 2

3. 阅读如图的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 x 的值为 1, 则输出 S 的值为 ()



- (A) 64 (B) 73 (C) 512 (D) 585

4. 已知下列三个命题:

- ① 若一个球的半径缩小到原来的 $\frac{1}{2}$, 则其体积缩小到原来的 $\frac{1}{8}$;
 ② 若两组数据的平均数相等, 则它们的标准差也相等;
 ③ 直线 $x + y + 1 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 相切.

其中真命题的序号是

- (A) ①②③ (B) ①② (C) ①③ (D) ②③

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的准线分别交于 A, B 两点, O 为坐标原点. 若双曲线的离心率为 2, $\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $p =$ ()

- (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) 3

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 3$, 则 $\sin \angle BAC =$ ()

- (A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (C) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

7. 函数 $f(x) = 2^x |\log_{0.5} x| - 1$ 的零点个数为 ()
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

8. 已知函数 $f(x) = x(1 + a|x|)$. 设关于 x 的不等式 $f(x+a) < f(x)$ 的解集为 A , 若 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$ (B) $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0)$
 (C) $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0) \cup (0, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$ (D) $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$

二、填空题

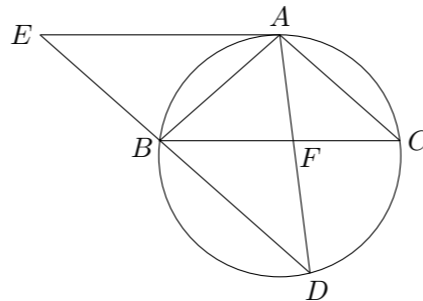
9. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位. 若 $(a+i)(1+i) = bi$, 则 $a+bi =$ _____.

10. $(x - \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的二项展开式中的常数项为_____.

11. 已知圆的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$, 圆心为 C , 点 P 的极坐标为 $(4, \frac{\pi}{3})$, 则 $|CP| =$ _____.

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD = 1$, $\angle BAD = 60^\circ$, E 为 CD 的中点. 若 $\vec{AC} \cdot \vec{BE} = 1$, 则 AB 的长为_____.

13. 如图, $\triangle ABC$ 为圆的内接三角形, BD 为圆的弦, 且 $BD \parallel AC$. 过点 A 作圆的切线与 DB 的延长线交于点 E , AD 与 BC 交于点 F . 若 $AB = AC$, $AE = 6$, $BD = 5$, 则线段 CF 的长为_____.



14. 设 $a + b = 2$, $b > 0$, 则当 $a =$ _____时, $\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b}$ 取得最小值.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = -\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 6 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x + 1$, $x \in \mathbf{R}$.

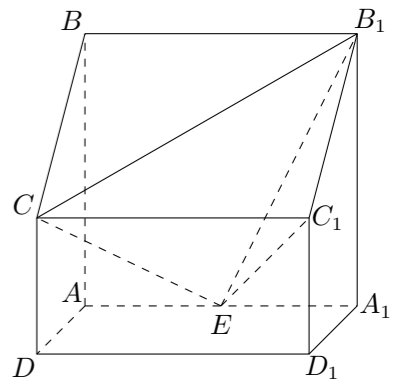
- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
 (2) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

16. 一个盒子里装有 7 张卡片, 其中有红色卡片 4 张, 编号分别为 1, 2, 3, 4; 白色卡片 3 张, 编号分别为 2, 3, 4. 从盒子中任取 4 张卡片 (假设取到任何一张卡片的可能性相同).

- (1) 求取出的 4 张卡片中, 含有编号为 3 的卡片的概率.
 (2) 在取出的 4 张卡片中, 红色卡片编号的最大值设为 X , 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

17. 如图所示, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $AB \perp AD$, $AD = CD = 1$, $AA_1 = AB = 2$, E 为棱 AA_1 的中点.

- (1) 证明: $B_1C_1 \perp CE$;
 (2) 求二面角 $B_1 - CE - C_1$ 的平面角的正弦值;
 (3) 设点 M 在线段 C_1E 上, 且直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$, 求线段 AM 的长.



18. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
- (1) 求椭圆的方程;
- (2) 设 A, B 分别为椭圆的左、右顶点, 过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点. 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 8$, 求 k 的值.
19. 已知首项为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 不是递减数列, 其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $S_3 + a_3, S_5 + a_5, S_4 + a_4$ 成等差数列.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $T_n = S_n - \frac{1}{S_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求数列 $\{T_n\}$ 的最大项的值与最小项的值.
20. 已知函数 $f(x) = x^2 \ln x$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 证明: 对任意的 $t > 0$, 存在唯一的 s , 使 $t = f(s)$;
- (3) 设 (2) 中所确定的 s 关于 t 的函数为 $s = g(t)$, 证明: 当 $t > e^2$ 时, 有 $\frac{2}{5} < \frac{\ln g(t)}{\ln t} < \frac{1}{2}$.