2013 普通高等学校招生考试 (安徽卷文)

一、选择题

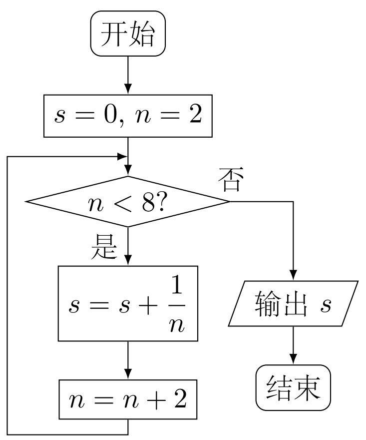
1. 设 i 是虚数单位, 若复数 $a-\frac{10}{3-\mathrm{i}}$ $(a\in\mathbf{R})$ 是纯虚数, 则 a 的值为 ( )

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

2. 已知 $A=\{x \mid x+1>0\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$ ( )

(A) $\{-2,\ -1\}$ (B) $\{-2\}$ (C) $\{-1,\ 0,\ 1\}$ (D) $\{0,\ 1\}$

3. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出结果是 ( )



(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{11}{12}$ (D) $\frac{25}{24}$

4. "$(2x-1)x=0$"是"$x=0$"的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 若某公司从五位大学毕业生甲、乙、丙、丁、戊中录用三人, 这五人被录用的机会均等, 则甲或乙被录用的概率为 ( )

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{9}{10}$

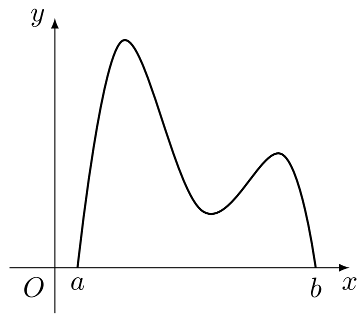
6. 直线 $x+2y-5+\sqrt{5}=0$ 被圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 截得的弦长为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) $4\sqrt{6}$

7. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_8=4a_3$, $a_7=-2$, 则 $a_9=$ ( )

(A) -6 (B) -4 (C) -2 (D) 2

8. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示, 在区间 $[a,b]$ 上可找到 n $(n\geqslant 2)$ 个不同的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使得 $\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\frac{f(x_n)}{x_n}$, 则 n 的取值范围为 ( )



(A) $\{2,\ 3\}$ (B) $\{2,\ 3,\ 4\}$ (C) $\{3,\ 4\}$ (D) $\{3,\ 4,\ 5\}$

9. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c, 若 $b+c=2a$, $3\sin A=5\sin B$, 则角 $C=$ ( )

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

10. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有两个极值点 x_1, x_2, 若 $f(x_1)=x_1<x_2$, 则关于 x 的方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$ 的不同实根个数为 ( )

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

二、填空题

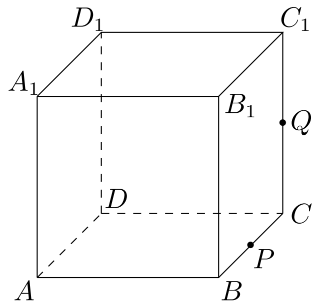
11. 函数 $y=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为______.

12. 若非负变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant -1,\\ x+2y\leqslant 4,\end{cases}$ 则 $x+y$ 的最大值为______.

13. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为______.

14. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=2f(x)$. 若当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(x)=x(1-x)$, 则当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时, $f(x)=$______.

15. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, P 为 BC 中点, Q 为线段 CC_1 上的动点, 过 A、P、Q 的平面截该正方体所得的截面记为 S, 则下列命题正确的是______. (写出所有正确命题的编号)



① 当 $0<CQ<\frac{1}{2}$ 时, S 为四边形;

② 当 $CQ=\frac{1}{2}$ 时, S 为等腰梯形;

③ 当 $CQ=\frac{3}{4}$ 时, S 与 C_1D_1 交点 R 满足 $C_1R=\frac{1}{3}$;

④ 当 $\frac{3}{4}<CQ<1$ 时, S 为六边形;

⑤ 当 $CQ=1$ 时, S 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

三、解答题

16. 设函数 $f(x)=\sin x+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值, 并求使 $f(x)$ 取得最小值的 x 的集合;

(2) 不画图, 说明函数 $y=f(x)$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变化得到.

17. 为调查甲、乙两校高三年级学生某次联考数学成绩情况, 用简单随机抽样, 从这两校中各抽取 30 名高三年级学生, 以他们的数学成绩 (百分制) 作为样本, 样本数据的茎叶图如图:

甲		乙
7	4	5
5 3 3 2	5	3 3 8
5 5 4 3 3 3 1 0 0	6	0 0 0 1 1 2 2 3 3 5
8 6 6 2 2 1 1 0 0	7	0 0 2 2 2 3 3 6 6 9
7 5 4 4 2	8	1 1 5 5 8
2 0	9	0

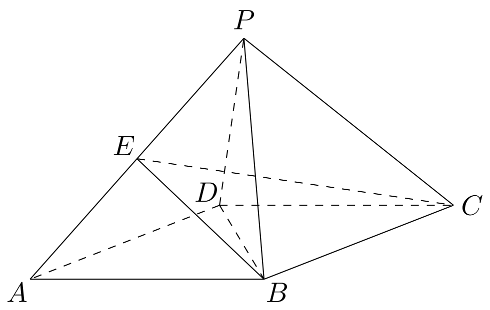
(1) 若甲校高三年级每位学生被抽取的概率为 0.05, 求甲校高三年级学生总人数, 并估计甲校高三年级这次联考数学成绩的及格率 (60 分及 60 分以上为及格);

(2) 设甲、乙两校高三年级学生这次联考数学平均成绩分别为 $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, 估计 $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ 的值.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD=60^\circ$. 已知 $PB=PD=2$, $PA=\sqrt{6}$.

(1) 证明: $PC\perp BD$;

(2) 若 E 为 PA 的中点, 求三棱锥 $P-BCE$ 的体积.



19. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_2+a_4=8$, 且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 函数 $f(x)=(a_n-a_{n+1}+a_{n+2})x+a_{n+1}\cos x-a_{n+2}\sin x$ 满足 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n=2\left(a_n+\dfrac{1}{2^{a_n}}\right)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

20. 设函数 $f(x)=ax-(1+a^2)x^2$, 其中 $a>0$, 区间 $I=\{x\mid f(x)>0\}$.

(1) 求 I 的长度 (注: 区间 (α,β) 的长度定义为 $\beta-\alpha$);

(2) 给定常数 $k\in(0,1)$, 当 $1-k\leqslant a\leqslant 1+k$ 时, 求 I 长度的最小值.

21. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的焦距为 4, 且过点 $P\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 $Q(x_0,y_0)$ $(x_0y_0\neq 0)$ 为椭圆 C 上一点, 过点 Q 作 x 轴的垂线, 垂足为 E. 取点 $A\left(0,2\sqrt{2}\right)$, 连接 AE. 过点 A 作 AE 的垂线交 x 轴于点 D. 点 G 是点 D 关于 y 轴的对称点, 作直线 QG, 问这样作出的直线 QG 是否与椭圆 C 一定有唯一的公共点? 并说明理由.