2013 普通高等学校招生考试 (广东卷文)

一、选择题

1. 设集合 $S=\{x\mid x^2+2x=0,\ x\in\mathbf{R}\}$, $T=\{x\mid x^2-2x=0,\ x\in\mathbf{R}\}$, 则 $S\cap T=$ ( )

(A) $\{0\}$ (B) $\{0,\ 2\}$ (C) $\{-2,\ 0\}$ (D) $\{-2,\ 0,\ 2\}$

2. 函数 $y=\dfrac{\lg(x+1)}{x-1}$ 的定义域是 ( )

(A) $(-1,+\infty)$ (B) $[-1,+\infty)$

(C) $(-1,1)\cup(1,+\infty)$ (D) $[-1,1)\cup(1,+\infty)$

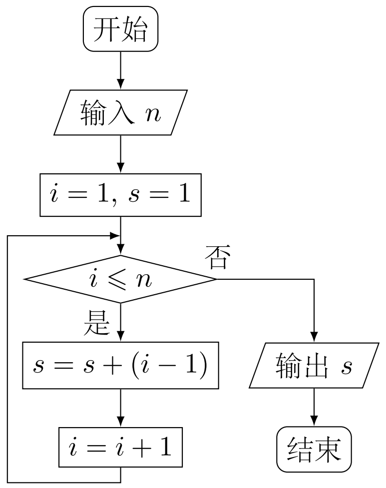
3. 若 $\mathrm{i}\,(x+y\mathrm{i})=3+4\mathrm{i}$, $x,\ y\in\mathbf{R}$, 则复数 $x+y\mathrm{i}$ 的模是 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

4. 已知 $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\dfrac{1}{5}$, 那么 $\cos\alpha=$ ( )

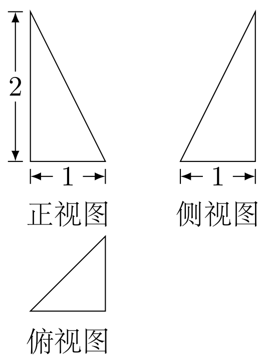
(A) $-\dfrac{2}{5}$ (B) $-\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) $\dfrac{2}{5}$

5. 执行如图所示的程序框图, 若输入 n 的值为 3, 则输出 s 的值是 ( )



(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 7

6. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积是 ( )



(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) 1

7. 垂直于直线 $y=x+1$ 且与圆 $x^2+y^2=1$ 相切于第一象限的直线方程是 ( )

(A) $x+y-\sqrt{2}=0$ (B) $x+y+1=0$

(C) $x+y-1=0$ (D) $x+y+\sqrt{2}=0$

8. 设 l 为直线, α, β 是两个不同的平面, 下列命题中正确的是 ( )

(A) 若 $l\parallel\alpha$, $l\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$ (B) 若 $l\perp\alpha$, $l\perp\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$

(C) 若 $l\perp\alpha$, $l\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$ (D) 若 $\alpha\perp\beta$, $l\parallel\alpha$, 则 $l\perp\beta$

9. 已知中心在原点的椭圆 C 的右焦点为 $F(1,0)$, 离心率等于 $\dfrac{1}{2}$, 则 C 的方程是 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{\sqrt{3}}=1$

(C) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

10. 设 $\boldsymbol{a}$ 是已知的平面向量且 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$. 关于向量 $\boldsymbol{a}$ 的分解, 有如下四个命题:

① 给定向量 $\boldsymbol{b}$, 总存在向量 $\boldsymbol{c}$, 使 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$;

② 给定向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$, 总存在实数 λ 和 μ, 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$;

③ 给定单位向量 $\boldsymbol{b}$ 和正数 μ, 总存在单位向量 $\boldsymbol{c}$ 和实数 λ, 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$;

④ 给定正数 λ 和 μ, 总存在单位向量 $\boldsymbol{b}$ 和单位向量 $\boldsymbol{c}$, 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$.

上述命题中的向量 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 在同一平面内且两两不共线, 则真命题的个数是 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题

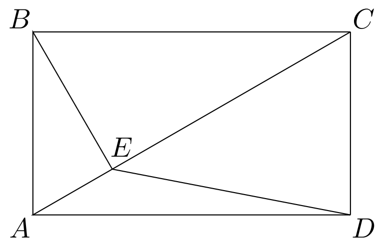
11. 设数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 -2 的等比数列, 则 $a_1+|a_2|+a_3+|a_4|=$______.

12. 若曲线 $y=ax^2-\ln x$ 在点 $(1,a)$ 处的切线平行于 x 轴, 则 $a=$______.

13. 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+3\geqslant 0,\\-1\leqslant x\leqslant 1,\\y\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值是______.

14. 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$, 以极点为原点, 极轴为 x 轴的正半轴建立直角坐标系, 则曲线 C 的参数方程为______.

15. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=\sqrt{3}$, $BC=3$, $BE\perp AC$, 垂足为 E, 则 $ED=$______.



三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值;

(2) 若 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$, $\theta\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$, 求 $f\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

17. 从一批苹果中, 随机抽取 50 个, 其重量 (单位: 克) 的频数分布表如下:

分组 (重量)	$[80,85)$	$[85,90)$	$[90,95)$	$[95,100)$
频数	5	10	20	15

(1) 根据频数分布表计算苹果的重量在 $[90,95)$ 的频率;

(2) 用分层抽样的方法从重量在 $[80,85)$ 和 $[95,100)$ 的苹果中共抽取 4 个, 其中重量在 $[80,85)$ 的有几个?

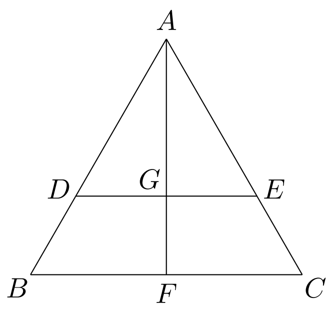
(3) 在 (2) 中抽出的 4 个苹果中, 任取 2 个, 求重量在 $[80,85)$ 和 $[95,100)$ 中各有 1 个的概率.

18. 如图①, 在边长为 1 的等边三角形 ABC 中, D, E 分别是 AB, AC 上的点, $AD = AE$, F 是 BC 的中点, AF 与 DE 交于点 G, 将 $\triangle ABF$ 沿 AF 折起, 得到如图②所示的三棱锥 $A-BCF$, 其中 $BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

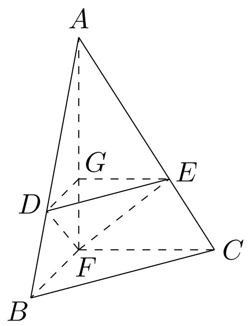
(1) 证明: $DE \parallel$ 平面 BCF;

(2) 证明: $CF \perp$ 平面 ABF;

(3) 当 $AD = \dfrac{2}{3}$ 时, 求三棱锥 $F-DEG$ 的体积 V_{F-DEG}.



图①



图②

19. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 满足 $4S_n = a_{n+1}^2 - 4n - 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, 且 a_2, a_5, a_{14} 构成等比数列.

(1) 证明: $a_2 = \sqrt{4a_1 + 5}$;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 证明: 对一切正整数 n, 有 $\dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_na_{n+1}} < \dfrac{1}{2}$.

20. 已知抛物线 C 的顶点为原点, 其焦点 $F(0, c)$ $(c > 0)$ 到直线 l: $x-y-2=0$ 的距离为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. 设 P 为直线 l 上的点, 过点 P 作抛物线 C 的两条切线 PA, PB, 其中 A, B 为切点.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 当点 $P(x_0, y_0)$ 为直线 l 上的定点时, 求直线 AB 的方程;

(3) 当点 P 在直线 l 上移动时, 求 $|AF| \cdot |BF|$ 的最小值.

21. 设函数 $f(x) = x^3 - kx^2 + x$ $(x \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $k = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $k < 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[k, -k]$ 上的最小值 m 和最大值 M.