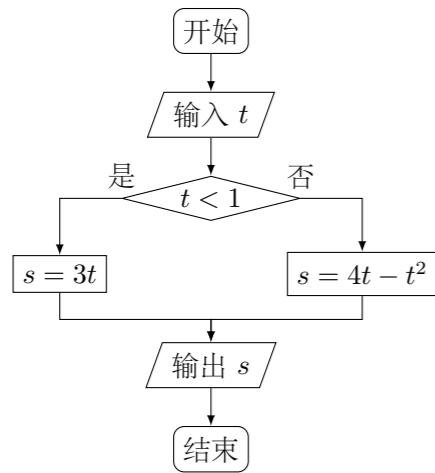


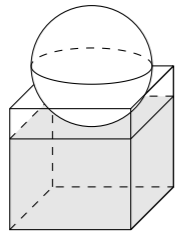
2013 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 理)

一、选择题

- 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x > 0\}$, $B = \{x | -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\}$, 则 ()
 (A) $A \cap B = \emptyset$ (B) $A \cup B = \mathbf{R}$ (C) $B \subseteq A$ (D) $A \subseteq B$
- 若复数 z 满足 $(3 - 4i)z = |4 + 3i|$, 则 z 的虚部为 ()
 (A) -4 (B) $-\frac{4}{5}$ (C) 4 (D) $\frac{4}{5}$
- 为了解某地区的中小学生视力情况, 拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查, 事先已了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异, 而男女生视力情况差异不大, 在下面的抽样方法中, 最合理的抽样方法是 ()
 (A) 简单随机抽样 (B) 按性别分层抽样
 (C) 按学段分层抽样 (D) 系统抽样
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 C 的渐近线方程为 ()
 (A) $y = \pm \frac{1}{4}x$ (B) $y = \pm \frac{1}{3}x$ (C) $y = \pm \frac{1}{2}x$ (D) $y = \pm x$
- 执行下面的程序框图, 若输入的 $t \in [-1, 3]$, 则输出的 s 属于 ()



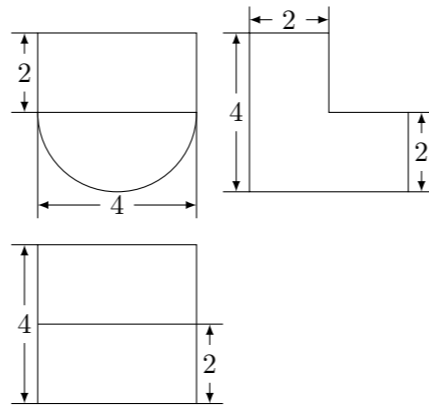
- (A) $[-3, 4]$ (B) $[-5, 2]$ (C) $[-4, 3]$ (D) $[-2, 5]$
- 如图, 有一个水平放置的透明无盖的正方体容器, 容器高 8 cm, 将一个球放在容器口, 再向容器内注水, 当球面恰好接触水面时测得水深为 6 cm, 如果不计容器的厚度, 则球的体积为 ()



- (A) $\frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$ (B) $\frac{866\pi}{3} \text{ cm}^3$ (C) $\frac{1372\pi}{3} \text{ cm}^3$ (D) $\frac{2048\pi}{3} \text{ cm}^3$

- 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_{m-1} = -2$, $S_m = 0$, $S_{m+1} = 3$, 则 $m =$ ()
 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

- 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ()



- (A) $16 + 8\pi$ (B) $8 + 8\pi$ (C) $16 + 16\pi$ (D) $8 + 16\pi$

- 设 m 为正整数, $(x + y)^{2m}$ 展开式的二项式系数的最大值为 a , $(x + y)^{2m+1}$ 展开式的二项式系数的最大值为 b , 若 $13a = 7b$, 则 $m =$ ()

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

- 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(3, 0)$, 过点 F 的直线交 E 于 A, B 两点. 若 AB 的中点坐标为 $(1, -1)$, 则 E 的方程为 ()

- (A) $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$ (B) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ (C) $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$ (D) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \leq 0, \\ \ln(x+1), & x > 0, \end{cases}$ 若 $|f(x)| \geq ax$, 则 a 的取值范围是 ()

- (A) $(-\infty, 0]$ (B) $(-\infty, 1]$ (C) $[-2, 1]$ (D) $[-2, 0]$

- 设 $\triangle A_n B_n C_n$ 的三边长分别为 a_n, b_n, c_n , $\triangle A_n B_n C_n$ 的面积为 S_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, 若 $b_1 > c_1$, $b_1 + c_1 = 2a_1$, $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2}$, $c_{n+1} = \frac{b_n + a_n}{2}$, 则 ()

- (A) $\{S_n\}$ 为递减数列
 (B) $\{S_n\}$ 为递增数列
 (C) $\{S_{2n-1}\}$ 为递增数列, $\{S_{2n}\}$ 为递减数列
 (D) $\{S_{2n-1}\}$ 为递减数列, $\{S_{2n}\}$ 为递增数列

二、填空题

- 已知两个单位向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的夹角为 60° , $\mathbf{c} = t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}$, 若 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, 则 $t =$ _____.

- 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n =$ _____.

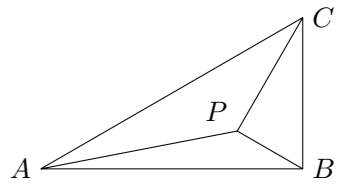
- 设当 $x = \theta$ 时, 函数 $f(x) = \sin x - 2\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos \theta =$ _____.

- 若函数 $f(x) = (1 - x^2)(x^2 + ax + b)$ 的图象关于直线 $x = -2$ 对称, 则 $f(x)$ 的最大值是_____.

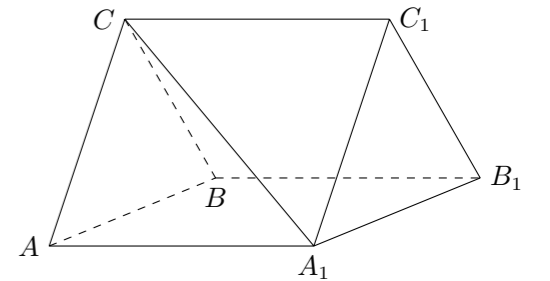
三、解答题

- 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$, P 为 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle BPC = 90^\circ$.

- (1) 若 $PB = \frac{1}{2}$, 求 PA ;
- (2) 若 $\angle APB = 150^\circ$, 求 $\tan \angle PBA$.



- 如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $CA = CB$, $AB = AA_1$, $\angle BAA_1 = 60^\circ$.
 (1) 证明: $AB \perp A_1C$;
 (2) 若平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1B_1B , $AB = CB$, 求直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值.



19. 一批产品需要进行质量检验, 检验方案是: 先从这批产品中任取 4 件作检验, 这 4 件产品中优质品的件数记为 n . 如果 $n = 3$, 再从这批产品中任取 4 件作检验, 若都为优质品, 则这批产品通过检验; 如果 $n = 4$, 再从这批产品中任取 1 件作检验, 若为优质品, 则这批产品通过检验; 其他情况下, 这批产品都不能通过检验. 假设这批产品的优质品率为 50%, 即取出的产品是优质品的概率都为 $\frac{1}{2}$, 且各件产品是否为优质品相互独立.
- (1) 求这批产品通过检验的概率;
- (2) 已知每件产品检验费用为 100 元, 凡抽取的每件产品都需要检验, 对这批产品作质量检验所需的费用记为 X (单位: 元), 求 X 的分布列及数学期望.

21. 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = e^x(cx + d)$, 若曲线 $y = f(x)$ 和曲线 $y = g(x)$ 都过点 $P(0, 2)$, 且在点 P 处有相同的切线 $y = 4x + 2$.
- (1) 求 a, b, c, d 的值;
- (2) 若 $x \geq -2$ 时, $f(x) \leq kg(x)$, 求 k 的取值范围.

23. 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 + 5 \cos t, \\ y = 5 + 5 \sin t, \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 2 \sin \theta$.
- (1) 把 C_1 的参数方程化为极坐标方程;
- (2) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标 ($\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$).

20. 已知圆 $M: (x+1)^2 + y^2 = 1$, 圆 $N: (x-1)^2 + y^2 = 9$, 动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切, 圆心 P 的轨迹为曲线 C .
- (1) 求 C 的方程;
- (2) l 是与圆 P , 圆 M 都相切的一条直线, l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 当圆 P 的半径最长时, 求 $|AB|$.

22. 如图, 直线 AB 为圆的切线, 切点为 B , 点 C 在圆上, $\angle ABC$ 的角平分线 BE 交圆于点 E , DB 垂直 BE 交圆于 D .
- (1) 证明: $DB = DC$;
- (2) 设圆的半径为 1, $BC = \sqrt{3}$, 延长 CE 交 AB 于点 F , 求 $\triangle BCF$ 外接圆的半径.

24. 已知函数 $f(x) = |2x - 1| + |2x + a|$, $g(x) = x + 3$.
- (1) 当 $a = -2$ 时, 求不等式 $f(x) < g(x)$ 的解集;
- (2) 设 $a > -1$, 且当 $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f(x) \leq g(x)$, 求 a 的取值范围.

