2013 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 文)

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\,|\,-3<x<1\}$, $N=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1\}$, 则 $M\cap N=$ ( )

(A) $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$ (B) $\{-3,\ -2,\ -1,\ 0\}$

(C) $\{-2,\ -1,\ 0\}$ (D) $\{-3,\ -2,\ -1\}$

2. $\left|\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}\right|=$ ( )

(A) $2\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) 1

3. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ x+y-1\geqslant 0,\\ x\leqslant 3,\end{cases}$ 则 $z=2x-3y$ 的最小值是 ( )

(A) -7 (B) -6 (C) -5 (D) -3

4. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $b=2$, $B=\dfrac{\pi}{6}$, $C=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ( )

(A) $2\sqrt{3}+2$ (B) $\sqrt{3}+1$ (C) $2\sqrt{3}-2$ (D) $\sqrt{3}-1$

5. 设椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, P 是 C 上的点, $PF_2\perp F_1F_2$, $\angle PF_1F_2=30^\circ$, 则 C 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

6. 已知 $\sin 2\alpha=\dfrac{2}{3}$, 则 $\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

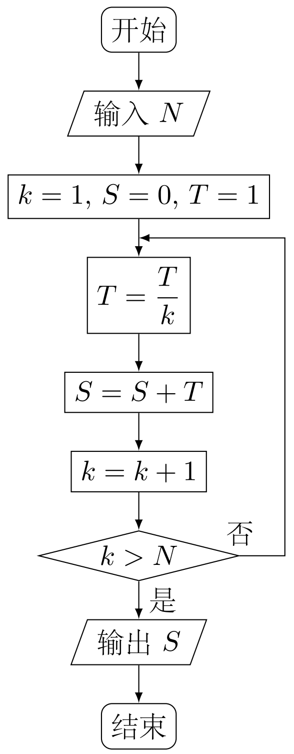
7. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $N=4$, 那么输出的 $S=$ ( )

(A) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$

(B) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\times 2}+\dfrac{1}{4\times 3\times 2}$

(C) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}$

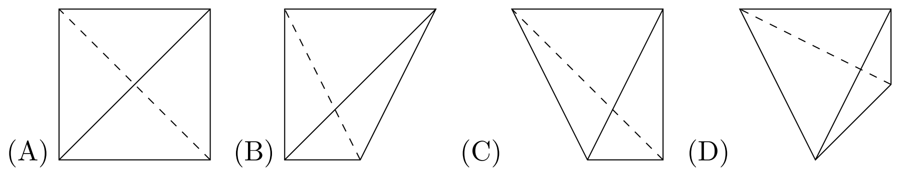
(D) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\times 2}+\dfrac{1}{4\times 3\times 2}+\dfrac{1}{5\times 4\times 3\times 2}$



8. 设 $a=\log_3 2$, $b=\log_5 2$, $c=\log_2 3$, 则 ( )

(A) $a>c>b$ (B) $b>c>a$ (C) $c>b>a$ (D) $c>a>b$

9. 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,0)$, 画该四面体三视图中的正视图时, 以 zOx 平面为投影面, 则得到正视图可以为 ( )



10. 设抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点为 F, 直线 l 过 F 且与 C 交于 A, B 两点, 若 $|AF|=3|BF|$, 则 l 的方程为 ( )

(A) $y=x-1$ 或 $y=-x+1$

(B) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

(C) $y=\sqrt{3}(x-1)$ 或 $y=-\sqrt{3}(x-1)$

(D) $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

11. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 下列结论中错误的是 ( )

(A) $\exists x_0\in\mathbf{R}$, $f(x_0)=0$

(B) 函数 $y=f(x)$ 的图象是中心对称图形

(C) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 单调递减

(D) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0)=0$

12. 若存在正数 x 使 $2^x(x-a)<1$ 成立, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,+\infty)$ (B) $(-2,+\infty)$ (C) $(0,+\infty)$ (D) $(-1,+\infty)$

二、填空题

13. 从 1, 2, 3, 4, 5 中任意取出两个不同的数, 其和为 5 的概率是______.

14. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$______.

15. 已知正四棱锥 $O-ABCD$ 的体积为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, 底面边长为 $\sqrt{3}$, 则以 O 为球心, OA 为半径的球的表面积为______.

16. 函数 $y=\cos(2x+\varphi)\ (-\pi\leqslant\varphi<\pi)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位后, 与函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象重合, 则 $\varphi=$______.

三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零, $a_1=25$, 且 a_1, a_{11}, a_{13} 成等比数列.

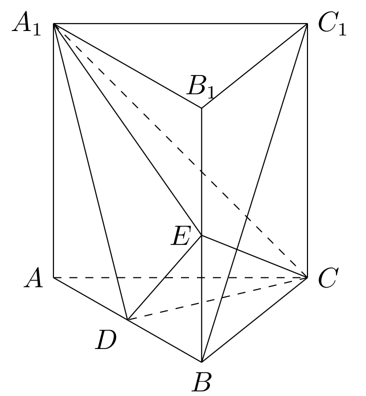
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{3n-2}$.

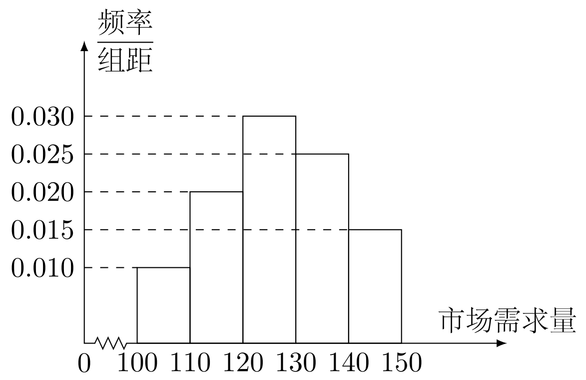
18. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别是 AB, BB_1 的中点.

(1) 证明: BC_1 // 平面 A_1CD;

(2) 设 $AA_1=AC=CB=2$, $AB=2\sqrt{2}$, 求三棱锥 $C-A_1DE$ 的体积.



19. 经销商经销某种农产品, 在一个销售季度内, 每售出 1 t 该产品获利润 500 元, 未售出的产品, 每 1 t 亏损 300 元. 根据历史资料, 得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图, 如图所示. 经销商为下一个销售季度购进了 130 t 该农产品. 以 X (单位: t, $100 \leqslant X \leqslant 150$) 表示下一个销售季度内的市场需求量, T (单位: 元) 表示下一个销售季度内经销该农产品的利润.

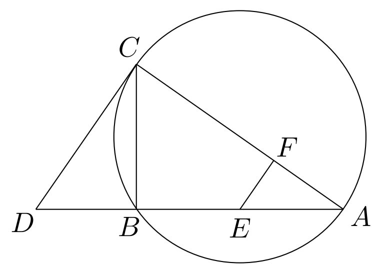


(1) 将 T 表示为 X 的函数;
(2) 根据直方图估计利润 T 不少于 57000 元的概率.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 P 在 x 轴上截得线段长为 $2\sqrt{2}$, 在 y 轴上截得线段长为 $2\sqrt{3}$.
(1) 求圆心 P 的轨迹方程;
(2) 若 P 点到直线 $y=x$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 求圆 P 的方程.

21. 已知函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$.
(1) 求 $f(x)$ 的极小值和极大值;
(2) 当曲线 $y=f(x)$ 的切线 l 的斜率为负数时, 求 l 在 x 轴上截距的取值范围.

22. 如图, CD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线, AB 的延长线交直线 CD 于点 D, E, F 分别为弦 AB 与弦 AC 上的点, 且 $BC \cdot AE = DC \cdot AF$, B, E, F, C 四点共圆.
(1) 证明: CA 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径;
(2) 若 $DB=BE=EA$, 求过 B, E, F, C 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 外接圆面积的比值.



23. 已知动点 P, Q 都在曲线 $C:\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=2\sin t,\end{cases}$ (t 为参数) 上, 对应参数分别为 $t=\alpha$ 与 $t=2\alpha$ $(0<\alpha<2\pi)$, M 为 PQ 的中点.
(1) 求 M 的轨迹的参数方程;
(2) 将 M 到坐标原点的距离 d 表示为 α 的函数, 并判断 M 的轨迹是否过坐标原点.

24. 设 a, b, c 均为正数, 且 $a+b+c=1$, 证明:
(1) $ab+bc+ca \leqslant \dfrac{1}{3}$;
(2) $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a} \geqslant 1$.