2013 普通高等学校招生考试 (江西卷文)

一、选择题

1. 复数 $z = \mathrm{i}\,(-2-\mathrm{i})$ (i 为虚数单位) 在复平面内所对应的点在 ( )

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 若集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + ax + 1 = 0\}$ 中只有一个元素, 则 $a =$ ( )

(A) 4　(B) 2　(C) 0　(D) 0 或 4

3. 若 $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos\alpha =$ ( )

(A) $-\dfrac{2}{3}$　(B) $-\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

4. 集合 $A = \{2,\ 3\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3\}$, 从 A, B 中各任意取一个数, 则这两数之和等于 4 的概率是 ( )

(A) $\dfrac{2}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{1}{6}$

5. 总体由编号为 01, 02, $\cdots$, 19, 20 的 20 个个体组成. 利用下面的随机数表选取 5 个个体, 选取方法从随机数表第 1 行的第 5 列和第 6 列数字开始由左到右依次选取两个数字, 则选出来的第 5 个个体的编号为 ( )

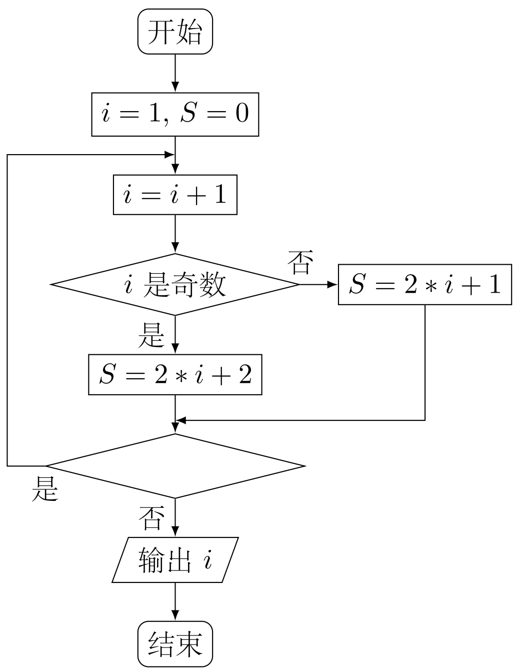
7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9234	4935	8200	3623	4869	6938	7481

(A) 08　(B) 07　(C) 02　(D) 01

6. 下列选项中, 使不等式 $x < \dfrac{1}{x} < x^2$ 成立的 x 的取值范围是 ( )

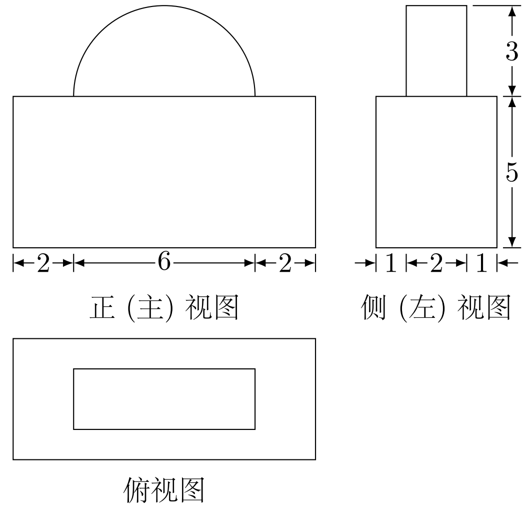
(A) $(-\infty, -1)$　(B) $(-1, 0)$　(C) $(0, 1)$　(D) $(1, +\infty)$

7. 阅读如图所示程序框图, 如果输出 $i = 4$, 那么在空白的判断框中应填入的条件是 ( )



(A) $S < 8$　(B) $S < 9$　(C) $S < 10$　(D) $S < 11$

8. 一几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )

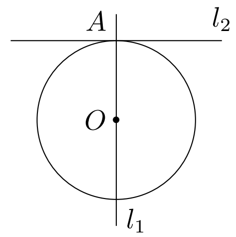


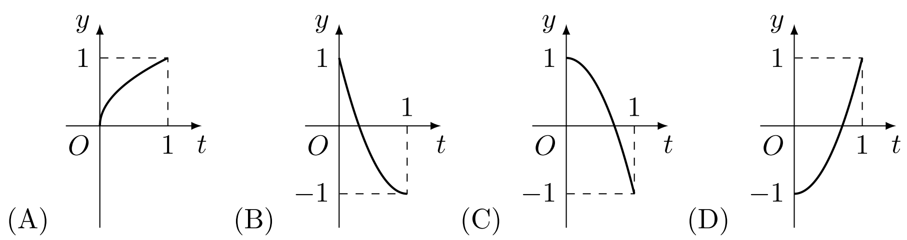
(A) $200 + 9\pi$　(B) $200 + 18\pi$　(C) $140 + 9\pi$　(D) $140 + 18\pi$

9. 已知点 $A\,(2, 0)$, 抛物线 C: $x^2 = 4y$ 的焦点为 F, 射线 FA 与抛物线 C 相交于点 M, 与其准线相交于点 N, 则 $|FM| : |MN| =$ ( )

(A) $2 : \sqrt{5}$　(B) $1 : 2$　(C) $1 : \sqrt{5}$　(D) $1 : 3$

10. 如图, 已知 $l_1 \perp l_2$, 圆心在 l_1 上, 半径为 1 m 的圆 O 在 $t = 0$ 时与 l_2 相切于点 A, 圆 O 沿 l_1 以 1 m/s 的速度匀速向上移动, 圆被直线 l_2 所截上方圆弧长记为 x, 令 $y = \cos x$, 则 y 与时间 t $(0 \leqslant t \leqslant 1$, 单位: s) 的函数 $y = f\,(t)$ 的图象大致为 ( )





二、填空题

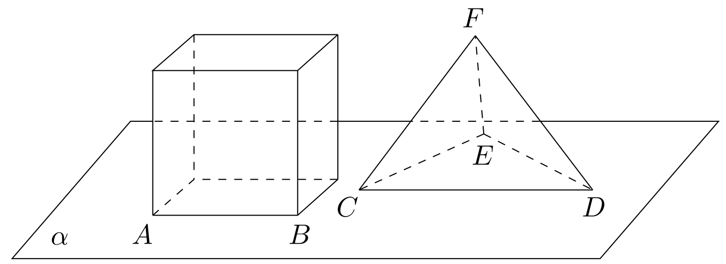
11. 若曲线 $y = x^{\alpha} + 1$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线经过坐标原点, 则 $\alpha =$______.

12. 某住宅小区计划植树不少于 100 棵, 若第一天植 2 棵, 以后每天植树的棵数是前一天的 2 倍, 则需要的最少天数 n $(n \in \mathbf{N}^*)$ 等于______.

13. 设 $f\,(x) = \sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x$, 若对任意实数 x 都有 $|f\,(x)| \leqslant a$, 则实数 a 的取值范围是______.

14. 若圆 C 经过坐标原点和点 $(4, 0)$, 且与直线 $y = 1$ 相切, 则圆 C 的方程是______.

15. 如图, 正方体的底面与正四面体的底面在同一平面 α 上, 且 $AB \parallel CD$, 则直线 EF 与正方体的六个面所在的平面相交的平面个数为______.



三、解答题

16. 正项数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n^2 - (2n-1)\,a_n - 2n = 0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = \dfrac{1}{(n+1)\,a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin A\sin B + \sin B\sin C + \cos 2B = 1$.

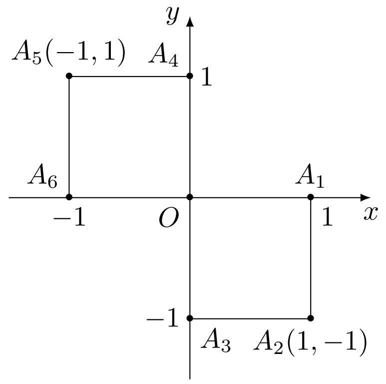
(1) 求证: a, b, c 成等差数列;

(2) 若 $C = \dfrac{2\pi}{3}$, 求 $\dfrac{a}{b}$ 的值.

18. 小波以游戏方式决定是去打球、唱歌还是去下棋, 游戏规则为: 以 O 为起点, 再从 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ (如图) 这 6 个点中任取两点分别为终点得到两个向量, 记这两个向量的数量积为 X, 若 $X>0$ 就去打球, 若 $X=0$ 就去唱歌, 若 $X<0$ 就去下棋.

(1) 写出数量积 X 的所有可能取值;

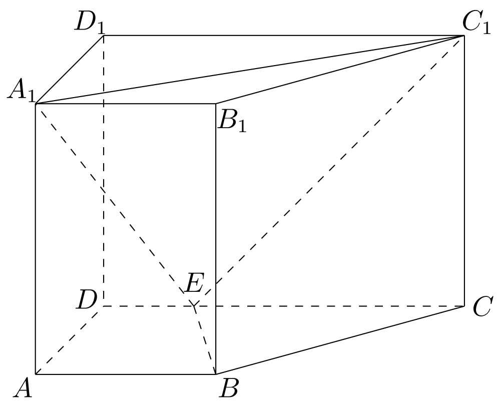
(2) 分别求小波去下棋的概率和不去唱歌的概率.



19. 如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB \parallel CD$, $AD \perp AB$, $AB=2$, $AD=\sqrt{2}$, $AA_1=3$, E 为 CD 上一点, $DE=1$, $EC=3$.

(1) 证明: $BE \perp$ 平面 BB_1C_1C;

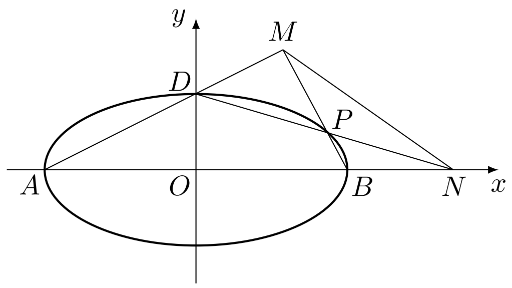
(2) 求点 B_1 到平面 EA_1C_1 的距离.



20. 椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $a+b=3$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 如图所示, A, B, D 是椭圆 C 的顶点, P 是椭圆 C 上除顶点外的任意一点, 直线 DP 交 x 轴于点 N, 直线 AD 交 BP 于点 M, 设 BP 的斜率为 k, MN 的斜率为 m, 证明: $2m-k$ 为定值.



21. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}x, & 0\leqslant x\leqslant a,\\ \dfrac{1}{1-a}(1-x), & a<x\leqslant 1,\end{cases}$ a 为常数且 $a\in(0,1)$.

(1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时, 求 $f\left(f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$;

(2) 若 x_0 满足 $f(f(x_0))=x_0$, 但 $f(x_0)\neq x_0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的二阶周期点, 证明: 函数 $f(x)$ 有且仅有两个二阶周期点, 并求出二阶周期点 x_1, x_2;

(3) 对于 (2) 中的 x_1, x_2, 设 $A(x_1, f(f(x_1)))$, $B(x_2, f(f(x_2)))$, $C(a^2, 0)$, 记 $\triangle ABC$ 的面积为 $S(a)$, 求 $S(a)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.