

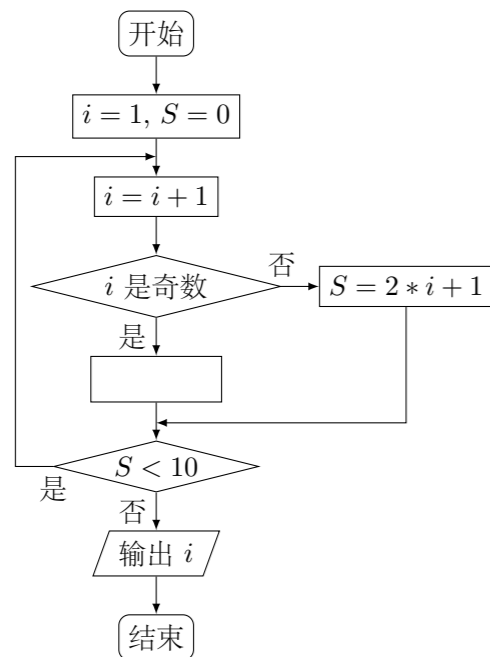
## 2013 普通高等学校招生考试 (江西卷理)

### 一、选择题

- 已知集合  $M = \{1, 2, zi\}$ ,  $i$  为虚数单位,  $N = \{3, 4\}$ ,  $M \cap N = \{4\}$ , 则复数  $z$  等于 ( )  
(A)  $-2i$  (B)  $2i$  (C)  $-4i$  (D)  $4i$
- 函数  $y = \sqrt{x} \ln(1-x)$  的定义域为 ( )  
(A)  $(0, 1)$  (B)  $[0, 1)$  (C)  $(0, 1]$  (D)  $[0, 1]$
- 等比数列  $x, 3x+3, 6x+6, \dots$  的第四项等于 ( )  
(A)  $-24$  (B)  $0$  (C)  $12$  (D)  $24$
- 总体由编号为  $01, 02, \dots, 19, 20$  的  $20$  个个体组成. 利用下面的随机数表选取  $5$  个个体, 选取方法从随机数表第  $1$  行的第  $5$  列和第  $6$  列数字开始由左到右依次选取两个数字, 则选出来的第  $5$  个个体的编号为 ( )  

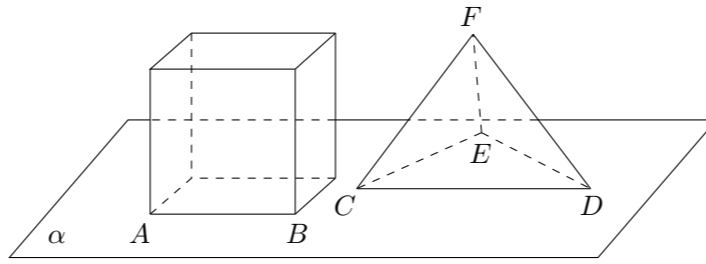
7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9234	4935	8200	3623	4869	6938	7481

  
(A)  $08$  (B)  $07$  (C)  $02$  (D)  $01$
- $(x^2 - \frac{2}{x^3})^5$  展开式中的常数项为 ( )  
(A)  $80$  (B)  $-80$  (C)  $40$  (D)  $-40$
- 若  $S_1 = \int_1^2 x^2 dx$ ,  $S_2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ ,  $S_3 = \int_1^2 e^x dx$ , 则  $S_1, S_2, S_3$  的大小关系为 ( )  
(A)  $S_1 < S_2 < S_3$  (B)  $S_2 < S_1 < S_3$  (C)  $S_2 < S_3 < S_1$  (D)  $S_3 < S_2 < S_1$
- 阅读如图所示程序框图, 如果输出  $i = 5$ , 那么在空白矩形框中应填入的语句为 ( )



- (A)  $S = 2 * i - 2$  (B)  $S = 2 * i - 1$  (C)  $S = 2 * i$  (D)  $S = 2 * i + 4$

8. 如图, 正方体的底面与正四面体的底面在同一平面  $\alpha$  上, 且  $AB \parallel CD$ , 正方体的六个面所在的平面与直线  $CE, EF$  相交的平面个数分别记为  $m, n$ , 那么  $m+n =$  ( )

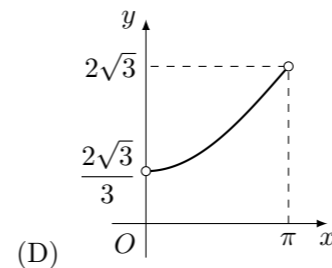
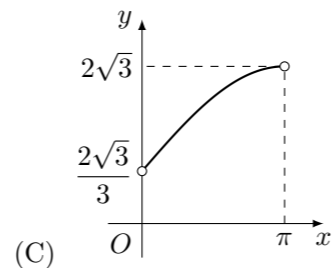
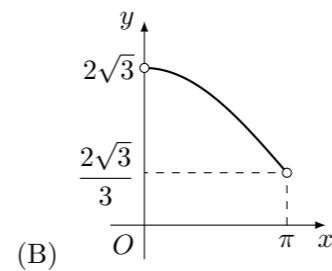
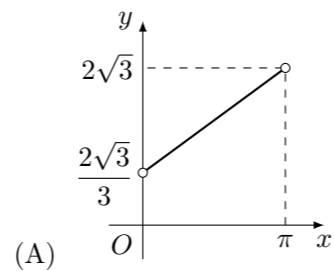
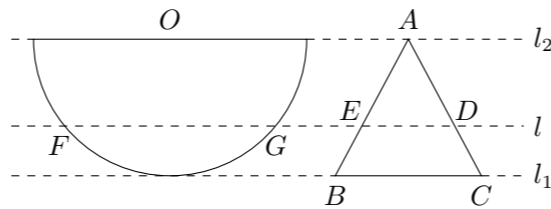


- (A)  $8$  (B)  $9$  (C)  $10$  (D)  $11$

9. 过点  $(\sqrt{2}, 0)$  引直线  $l$  与曲线  $y = \sqrt{1-x^2}$  相交于  $A, B$  两点,  $O$  为坐标原点, 当  $\triangle AOB$  的面积取最大值时, 直线  $l$  的斜率等于 ( )

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (B)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  (D)  $-\sqrt{3}$

10. 如图, 半径为  $1$  的半圆  $O$  与等边三角形  $ABC$  夹在两平行线  $l_1, l_2$  之间,  $l \parallel l_1$ ,  $l$  与半圆相交于  $F, G$  两点, 与三角形  $ABC$  两边相交于  $E, D$  两点. 设弧  $\widehat{FG}$  的长为  $x$  ( $0 < x < \pi$ ),  $y = EB + BC + CD$ , 若  $l$  从  $l_1$  平行移动到  $l_2$ , 则函数  $y = f(x)$  的图象大致是 ( )



### 二、填空题

- 函数  $y = \sin 2x + 2\sqrt{3}\sin^2 x$  的最小正周期  $T$  为\_\_\_\_\_.
- $e_1, e_2$  为单位向量, 且  $e_1, e_2$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ , 若  $a = e_1 + 3e_2, b = 2e_1$ , 则向量  $a$  在  $b$  方向上的射影为\_\_\_\_\_.
- 设函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内可导, 且  $f(e^x) = x + e^x$ , 则  $f'(1) =$ \_\_\_\_\_.

14. 抛物线  $x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ , 其准线与双曲线  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$  相交于  $A, B$  两点, 若  $\triangle ABF$  为等边三角形, 则  $p =$ \_\_\_\_\_.

15. 设曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases}$  ( $t$  为参数), 若以直角坐标系的原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 则曲线  $C$  的极坐标方程为\_\_\_\_\_.

16. 在实数范围内, 不等式  $||x-2|-1| \leq 1$  的解集为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\cos C + (\cos A - \sqrt{3}\sin A)\cos B = 0$ .

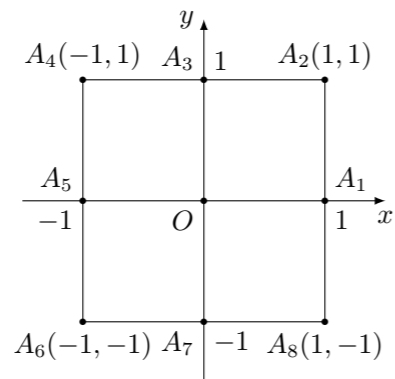
- 求角  $B$  的大小;
- 若  $a+c=1$ , 求  $b$  的取值范围.

18. 正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足:  $S_n^2 - (n^2 + n - 1)S_n - (n^2 + n) = 0$ .

- 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
- 令  $b_n = \frac{n+1}{(n+2)^2 a_n^2}$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ . 证明: 对于任意  $n \in \mathbf{N}^*$ , 都有  $T_n < \frac{5}{64}$ .

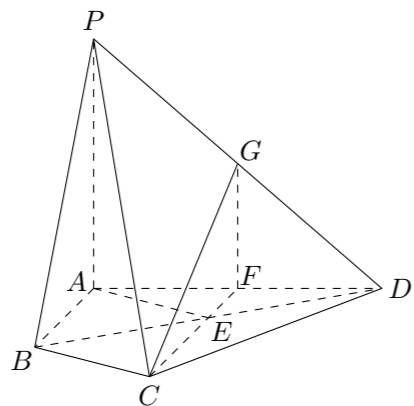
19. 小波以游戏方式决定是参加学校合唱团还是参加学校排球队, 游戏规则为: 以  $O$  为起点, 再从  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$  (如图) 这 8 个点中任取两点分别为终点得到两个向量, 记这两个向量的数量积为  $X$ . 若  $X = 0$  就参加学校合唱团, 否则就参加学校排球队.

- (1) 求小波参加学校合唱团的概率;  
 (2) 求  $X$  的分布列和数学期望.



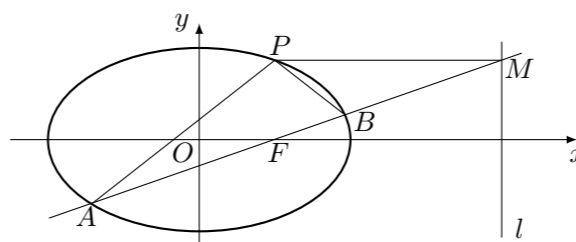
20. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $E$  为  $BD$  的中点,  $G$  为  $PD$  的中点,  $\triangle DAB \cong \triangle DCB$ ,  $EA = EB = AB = 1$ ,  $PA = \frac{3}{2}$ , 连接  $CE$  并延长交  $AD$  于  $F$ .

- (1) 求证:  $AD \perp$  平面  $CFG$ ;  
 (2) 求平面  $BCP$  与平面  $DCP$  的夹角的余弦值.



21. 如图, 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  经过点  $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ , 离心率  $e = \frac{1}{2}$ , 直线  $l$  的方程为  $x = 4$ .

- (1) 求椭圆  $C$  的方程;  
 (2)  $AB$  是经过右焦点  $F$  的任一弦 (不经过点  $P$ ), 设直线  $AB$  与直线  $l$  相交于点  $M$ , 记  $PA, PB, PM$  的斜率分别为  $k_1, k_2, k_3$ . 问: 是否存在常数  $\lambda$ , 使得  $k_1 + k_2 = \lambda k_3$ ? 若存在, 求  $\lambda$  的值; 若不存在, 请说明理由.



22. 已知函数  $f(x) = a\left(1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|\right)$ ,  $a$  为常数且  $a > 0$ .

- (1) 证明: 函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{1}{2}$  对称;  
 (2) 若  $x_0$  满足  $f(f(x_0)) = x_0$ , 但  $f(x_0) \neq x_0$ , 则称  $x_0$  为函数  $f(x)$  的二阶周期点, 如果  $f(x)$  有两个二阶周期点  $x_1, x_2$ , 试确定  $a$  的取值范围;  
 (3) 对于 (2) 中的  $x_1, x_2$  和  $a$ , 设  $x_3$  为函数  $f(f(x))$  的最大值点,  $A(x_1, f(f(x_1))), B(x_2, f(f(x_2))), C(x_3, 0)$ , 记  $\triangle ABC$  的面积为  $S(a)$ , 讨论  $S(a)$  的单调性.