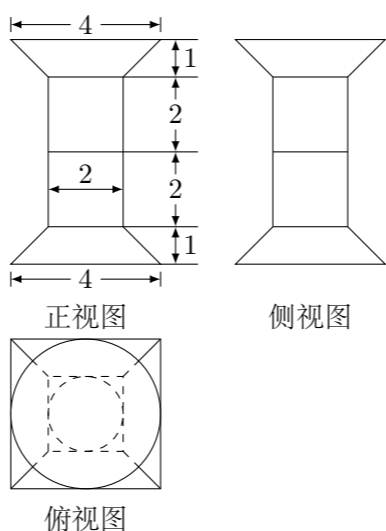


## 2013 普通高等学校招生考试 (湖北卷理)

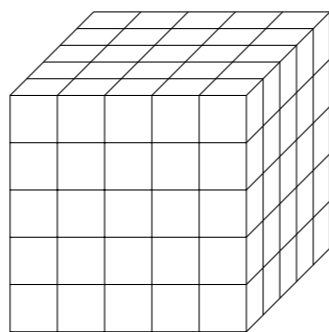
### 一、选择题

- 在复平面内, 复数  $z = \frac{2i}{1+i}$  ( $i$  为虚数单位) 的共轭复数对应的点位于 ( )  
 (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 已知全集为  $\mathbf{R}$ , 集合  $A = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 1\right\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 6x + 8 \leq 0\}$ , 则  $A \cap \complement_{\mathbf{R}} B =$  ( )  
 (A)  $\{x \mid x \leq 0\}$  (B)  $\{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$   
 (C)  $\{x \mid 0 \leq x < 2 \text{ 或 } x > 4\}$  (D)  $\{x \mid 0 < x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 4\}$
- 在一次跳伞训练中, 甲、乙两位学员各跳一次. 设命题  $p$  是“甲降落在指定范围”,  $q$  是“乙降落在指定范围”, 则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为 ( )  
 (A)  $(\neg p) \vee (\neg q)$  (B)  $p \vee (\neg q)$  (C)  $(\neg p) \wedge (\neg q)$  (D)  $p \vee q$
- 将函数  $y = \sqrt{3} \cos x + \sin x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 的图象向左平移  $m$  ( $m > 0$ ) 个单位长度后, 所得到的图象关于  $y$  轴对称, 则  $m$  的最小值是 ( )  
 (A)  $\frac{\pi}{12}$  (B)  $\frac{\pi}{6}$  (C)  $\frac{\pi}{3}$  (D)  $\frac{5\pi}{6}$
- 已知  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ , 则双曲线  $C_1: \frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 1$  与  $C_2: \frac{y^2}{\sin^2 \theta} - \frac{x^2}{\sin^2 \theta \tan^2 \theta} = 1$  的 ( )  
 (A) 实轴长相等 (B) 虚轴长相等 (C) 焦距相等 (D) 离心率相等
- 已知点  $A(-1, 1)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $C(-2, -1)$ ,  $D(3, 4)$ , 则向量  $\overrightarrow{AB}$  在  $\overrightarrow{CD}$  方向上的投影为 ( )  
 (A)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (B)  $\frac{3\sqrt{15}}{2}$  (C)  $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (D)  $-\frac{3\sqrt{15}}{2}$
- 一辆汽车在高速公路上行驶, 由于遇到紧急情况而刹车, 以速度  $v(t) = 7 - 3t + \frac{25}{1+t}$  ( $t$  的单位: s,  $v$  的单位: m/s) 行驶至停止, 在此期间汽车继续行驶的距离 (单位: m) 是 ( )  
 (A)  $1 + 25 \ln 5$  (B)  $8 + 25 \ln \frac{11}{3}$   
 (C)  $4 + 25 \ln 5$  (D)  $4 + 50 \ln 2$
- 一个几何体的三视图如图所示, 该几何体从上到下由四个简单几何体组成, 其体积分别记为  $V_1, V_2, V_3, V_4$ , 上面两个简单几何体均为旋转体, 下面两个简单几何体均为多面体, 则有 ( )



- (A)  $V_1 < V_2 < V_4 < V_3$  (B)  $V_1 < V_3 < V_2 < V_4$   
 (C)  $V_2 < V_1 < V_3 < V_4$  (D)  $V_2 < V_3 < V_1 < V_4$

- 如图, 将一个各面都涂了油漆的正方体, 切割为 125 个同样大小的小正方体, 经过搅拌后, 从中随机取一个小正方体, 记它的涂漆面数为  $X$ , 则  $X$  的均值  $E(X) =$  ( )

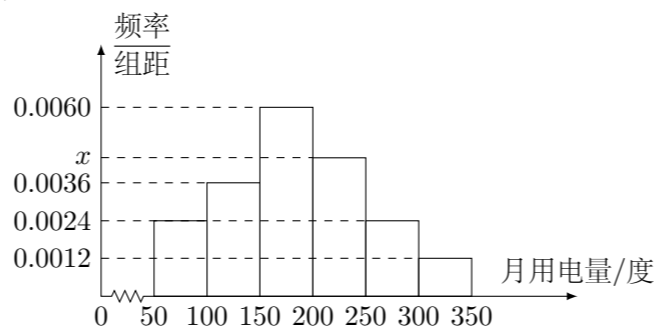


- (A)  $\frac{126}{125}$  (B)  $\frac{6}{5}$  (C)  $\frac{168}{125}$  (D)  $\frac{7}{5}$

- 已知  $a$  为常数, 函数  $f(x) = x(\ln x - ax)$  有两个极值点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 则 ( )  
 (A)  $f(x_1) > 0, f(x_2) > -\frac{1}{2}$  (B)  $f(x_1) < 0, f(x_2) < -\frac{1}{2}$   
 (C)  $f(x_1) > 0, f(x_2) < -\frac{1}{2}$  (D)  $f(x_1) < 0, f(x_2) > -\frac{1}{2}$

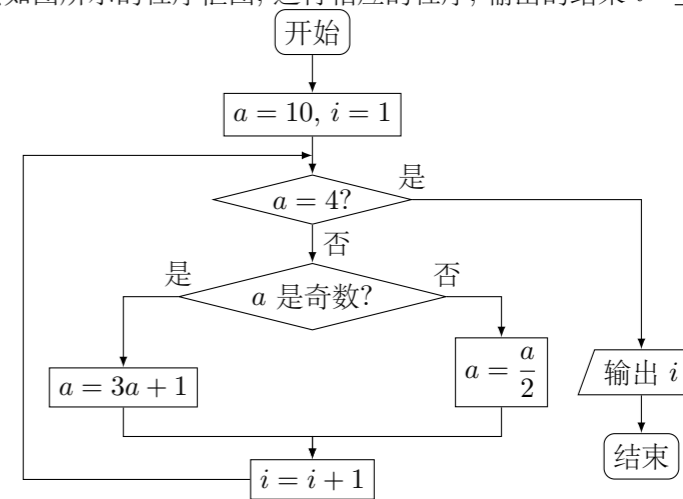
### 二、填空题

- 从某小区抽取 100 户居民进行月用电量调查, 发现其用电量都在 50 至 350 度之间, 频率分布直方图如图所示.



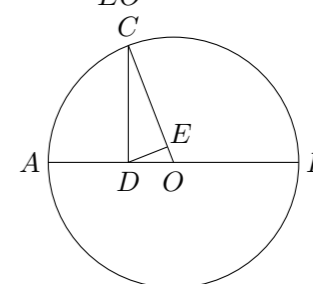
- 直方图中  $x$  的值为\_\_\_\_\_;
- 在这些用户中, 用电量落在区间  $[100, 250)$  内的户数为\_\_\_\_\_.

- 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果  $i =$ \_\_\_\_\_.



- 设  $x, y, z \in \mathbf{R}$ , 且满足:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + 2y + 3z = \sqrt{14}$ , 则  $x + y + z =$ \_\_\_\_\_.
- 古希腊毕达哥拉斯学派的数学家研究过各种多边形数, 如三角形数 1, 3, 6, 10, ..., 第  $n$  个三角形数为  $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ . 记第  $n$  个  $k$  边形数为  $N(n, k)$  ( $k \geq 3$ ), 以下列出了部分  $k$  边形数中第  $n$  个数的表达式:  
 三角形数  $N(n, 3) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ ,  
 正方形数  $N(n, 4) = n^2$ ,  
 五边形数  $N(n, 5) = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ ,  
 六边形数  $N(n, 6) = 2n^2 - n$ ,  
 .....  
 可以推测  $N(n, k)$  的表达式, 由此计算  $N(10, 24) =$ \_\_\_\_\_.

- 如图, 圆  $O$  上一点  $C$  在直径  $AB$  上的射影为  $D$ , 点  $D$  在半径  $OC$  上的射影为  $E$ , 若  $AB = 3AD$ , 则  $\frac{CE}{EO}$  的值为\_\_\_\_\_.



- 在直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi, \end{cases}$  ( $\varphi$  为参数,  $a > b > 0$ ), 在极坐标系 (与直角坐标系  $xOy$  取相同的长度单位, 且以原点  $O$  为极点, 以  $x$  轴正半轴为极轴) 中, 直线  $l$  与圆  $O$  的极坐标方程分别为  $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}m$  ( $m$  为非零常数) 与  $\rho = b$ , 若直线  $l$  经过椭圆  $C$  的焦点, 且与圆  $O$  相切, 则椭圆  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

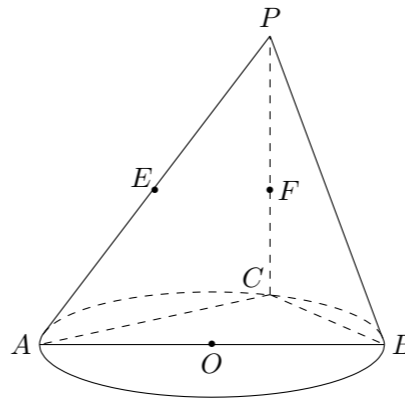
### 三、解答题

17. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  对应的边分别是  $a, b, c$ , 已知  $\cos 2A - 3\cos(B+C) = 1$ .
- (1) 求角  $A$  的大小;
  - (2) 若  $\triangle ABC$  的面积  $S = 5\sqrt{3}$ ,  $b = 5$ , 求  $\sin B \sin C$  的值.

18. 已知等比数列  $\{a_n\}$  满足:  $|a_2 - a_3| = 10$ ,  $a_1 a_2 a_3 = 125$ .

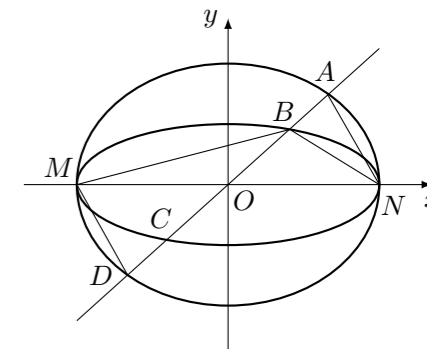
- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 是否存在正整数  $m$ , 使得  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_m} \geq 1$ ? 若存在, 求  $m$  的最小值; 若不存在, 说明理由.

19. 如图,  $AB$  是圆  $O$  的直径, 点  $C$  是圆  $O$  上异于  $A, B$  的点, 直线  $PC \perp$  平面  $ABC$ ,  $E, F$  分别是  $PA, PC$  的中点.
- (1) 记平面  $BEF$  与平面  $ABC$  的交线为  $l$ , 试判断直线  $l$  与平面  $PAC$  的位置关系, 并加以证明;
  - (2) 设 (1) 中的直线  $l$  与圆  $O$  的另一个交点为  $D$ , 且点  $Q$  满足  $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CP}$ , 记直线  $PQ$  与平面  $ABC$  所成的角为  $\theta$ , 异面直线  $PQ$  与  $EF$  所成的角为  $\alpha$ , 二面角  $E-l-C$  的大小为  $\beta$ , 求证:  $\sin \theta = \sin \alpha \sin \beta$ .



20. 假设每天从甲地去乙地的旅客人数  $X$  是服从正态分布  $N(800, 50^2)$  的随机变量, 记一天中从甲地去乙地的旅客人数不超过 900 的概率为  $P_0$ .
- (1) 求  $P_0$  的值;  
(参考数据: 若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 有  $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$ ,  $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$ ,  $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974$ )
  - (2) 某客运公司用  $A, B$  两种型号的车辆承担甲、乙两地间的长途客运业务, 每车每天往返一次,  $A, B$  两种车辆的载客量分别为 36 人和 60 人, 从甲地去乙地的营运成本分别为 1600 元/辆和 2400 元/辆. 公司拟组建一个不超过 21 辆车的客运车队, 并要求  $B$  型车不多于  $A$  型车 7 辆. 若每天要以不小于  $p_0$  的概率运完从甲地去乙地的旅客, 且使公司从甲地去乙地的营运成本最小, 那么应配备  $A$  型车、 $B$  型车各多少辆?

21. 如图, 已知椭圆  $C_1$  与  $C_2$  的中心在坐标原点  $O$ , 长轴均为  $MN$  且在  $x$  轴上, 短轴长分别为  $2m, 2n$  ( $m > n$ ), 过原点且不与  $x$  轴重合的直线  $l$  与  $C_1, C_2$  的四个交点按纵坐标从大到小依次为  $A, B, C, D$ , 记  $\lambda = \frac{m}{n}$ ,  $\triangle BDM$  和  $\triangle ABN$  的面积分别为  $S_1$  和  $S_2$ .
- (1) 当直线  $l$  与  $y$  轴重合时, 若  $S_1 = \lambda S_2$ , 求  $\lambda$  的值;
  - (2) 当  $\lambda$  变化时, 是否存在与坐标轴不重合的直线  $l$ , 使得  $S_1 = \lambda S_2$ ? 并说明理由.



22. 设  $n$  为正整数,  $r$  为正有理数.
- (1) 求函数  $f(x) = (1+x)^{r+1} - (r+1)x - 1$  ( $x > -1$ ) 的最小值;
  - (2) 证明:  $\frac{n^{r+1} - (n-1)^{r+1}}{r+1} < n^r < \frac{(n+1)^{r+1} - n^{r+1}}{r+1}$ ;
  - (3) 设  $x \in \mathbf{R}$ , 记  $[x]$  为不小于  $x$  的最小整数, 例如  $[2] = 2$ ,  $[\pi] = 4$ ,  $[-\frac{3}{2}] = -1$ . 令  $S = \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{82} + \sqrt[3]{83} + \dots + \sqrt[3]{125}$ , 求  $[S]$  的值.  
(参考数据:  $80^{\frac{1}{3}} \approx 344.7$ ,  $81^{\frac{1}{3}} \approx 350.5$ ,  $124^{\frac{1}{3}} \approx 618.3$ ,  $126^{\frac{1}{3}} \approx 631.7$ )