2013 普通高等学校招生考试 (湖南卷文)

一、选择题

1. 复数 $z = \mathrm{i}\cdot(1+\mathrm{i})$ (i 为虚数单位) 在复平面上对应的点位于 ( )

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. “$1<x<2$”是“$x<2$”成立的 ( )

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 某工厂甲、乙、丙三个车间生产了同一种产品, 数量分别为 120 件, 80 件, 60 件. 为了解它们的产品质量是否存在显著差异, 用分层抽样方法抽取了一个容量为 n 的样本进行调查, 其中从丙车间的产品中抽取了 3 件, 则 $n=$ ( )

(A) 9　(B) 10　(C) 12　(D) 13

4. 已知 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 且 $f(-1)+g(1)=2$, $f(1)+g(-1)=4$, 则 $g(1)$ 等于 ( )

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B 所对的边长分别为 a, b. 若 $2a\sin B=\sqrt{3}b$, 则角 A 等于 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{3}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\dfrac{\pi}{6}$　(D) $\dfrac{\pi}{12}$

6. 函数 $f(x)=\ln x$ 的图象与函数 $g(x)=x^2-4x+4$ 的图象的交点个数为 ( )

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

7. 已知正方体的棱长为 1, 其俯视图是一个面积为 1 的正方形, 侧视图是一个面积为 $\sqrt{2}$ 的矩形, 则该正方体的正视图的面积等于 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) 1　(C) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$　(D) $\sqrt{2}$

8. 已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是单位向量, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$, 则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值为 ( )

(A) $\sqrt{2}-1$　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{2}+1$　(D) $\sqrt{2}+2$

9. 已知事件“在矩形 $ABCD$ 的边 CD 上随机取一点 P, 使 $\triangle APB$ 的最大边是 AB”发生的概率为 $\dfrac{1}{2}$, 则 $\dfrac{AD}{AB}=$ ( )

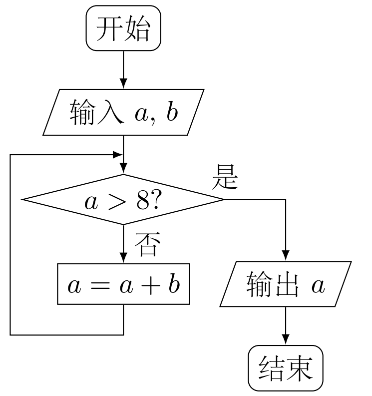
(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

二、填空题

10. 已知集合 $U=\{2,\ 3,\ 6,\ 8\}$, $A=\{2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 6,\ 8\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B=$______.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若直线 $l_1:\begin{cases}x=2s+1,\\ y=s,\end{cases}$ (s 为参数) 和直线 $l_2:\begin{cases}x=at,\\ y=2t-1,\end{cases}$ (t 为参数) 平行, 则常数 a 的值为______.

12. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $a=1$, $b=2$, 则输出的 a 的值为______.



13. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\leqslant 8,\\ 0\leqslant x\leqslant 4,\\ 0\leqslant y\leqslant 3,\end{cases}$ 则 $x+y$ 的最大值为______.

14. 设 F_1, F_2 是双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的两个焦点. 若在 C 上存在一点 P, 使 $PF_1\perp PF_2$, 且 $\angle PF_1F_2=30^\circ$, 则 C 的离心率为______.

15. 对于 $E=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{100}\}$ 的子集 $X=\{a_{i_1},\ a_{i_2},\ \cdots,\ a_{i_k}\}$, 定义 X 的“特征数列”为 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{100}$, 其中 $x_{i_1}=x_{i_2}=\cdots=x_{i_k}=1$, 其余项均为 0, 例如: 子集 $\{a_2,\ a_3\}$ 的“特征数列”为 $0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0$.

(1) 子集 $\{a_1,\ a_3,\ a_5\}$ 的“特征数列”的前 3 项和等于______.

(2) 若 E 的子集 P 的“特征数列”$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_{100}$ 满足 $p_1=1$, $p_i+p_{i+1}=1$, $1\leqslant i\leqslant 99$; E 的子集 Q 的“特征数列”$q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{100}$ 满足 $q_1=1$, $q_j+q_{j+1}+q_{j+2}=1$, $1\leqslant j\leqslant 98$, 则 $P\cap Q$ 的元素个数为______.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\cos x\cdot\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

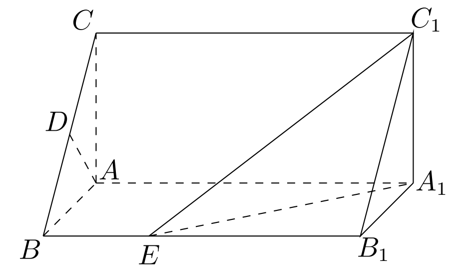
(1) 求 $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 的值;

(2) 求使 $f(x)<\dfrac{1}{4}$ 成立的 x 的取值集合.

17. 如图, 在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=\sqrt{2}$, $AA_1=3$, D 是 BC 的中点, 点 E 在棱 BB_1 上运动.

(1) 证明: $AD\perp C_1E$;

(2) 当异面直线 AC, C_1E 所成的角为 60° 时, 求三棱锥 $C_1-A_1B_1E$ 的体积.



18. 某人在如图所示的直角边长为 4 米的三角形地块的每个格点 (指纵、横直线的交叉点以及三角形的顶点) 处都种了一株相同品种的作物. 根据历年的种植经验, 一株该种作物的年收获量 Y (单位: kg) 与它的“相近”作物株数 X 之间的关系如下表所示:

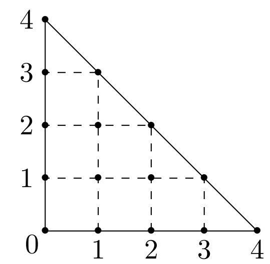
X	1	2	3	4
Y	51	48	45	42

这里, 两株作物“相近”是指它们之间的直线距离不超过 1 米.

(1) 完成下表, 并求所种作物的平均年收获量;

Y	51	48	45	42
频数		4		

(2) 在所种作物中随机选取一株, 求它的年收获量至少为 48 kg 的概率.



19. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 \neq 0$, $2a_n - a_1 = S_1 \cdot S_n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_1, a_2, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

20. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 E: $\dfrac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的左、右焦点, F_1, F_2 关于直线 $x + y - 2 = 0$ 的对称点是圆 C 的一条直径的两个端点.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 设过点 F_2 的直线 l 被椭圆 E 和圆 C 所截得的弦长分别为 a, b. 当 ab 最大时, 求直线 l 的方程.

21. 已知函数 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2}\mathrm{e}^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: 当 $f(x_1) = f(x_2)$ $(x_1 \neq x_2)$ 时, $x_1 + x_2 < 0$.