2013 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

一、选择题

1. 复数 $z=\mathrm{i}\cdot(1+\mathrm{i})$ (i 为虚数单位) 在复平面上对应的点位于 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 某学校有男、女学生各 500 名. 为了解男女学生在学习兴趣与业余爱好方面是否存在显著差异, 拟从全体学生中抽取 100 名学生进行调查, 则宜采用的抽样方法是 ( )

(A) 抽签法 (B) 随机数法 (C) 系统抽样法 (D) 分层抽样法

3. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B 所对的边长分别为 a, b. 若 $2a\sin B=\sqrt{3}b$, 则角 A 等于 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{12}$ (B) $\dfrac{\pi}{6}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{3}$

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}y\leqslant 2x,\\ x+y\leqslant 1,\\ y\geqslant -1,\end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值是 ( )

(A) $-\dfrac{5}{2}$ (B) 0 (C) $\dfrac{5}{3}$ (D) $\dfrac{5}{2}$

5. 函数 $f(x)=2\ln x$ 的图象与函数 $g(x)=x^2-4x+5$ 的图象的交点个数为 ( )

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

6. 已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是单位向量, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$, 则 $|\boldsymbol{c}|$ 的取值范围是 ( )

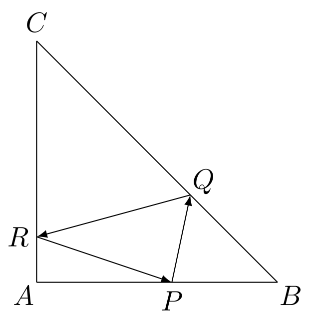
(A) $\left[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\right]$ (B) $\left[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+2\right]$

(C) $\left[1,\sqrt{2}+1\right]$ (D) $\left[1,\sqrt{2}+2\right]$

7. 已知棱长为 1 的正方体的俯视图是一个面积为 1 的正方形, 则该正方体的正视图的面积不可能等于 ( )

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

8. 在等腰直角三角形 ABC 中, $AB=AC=4$, 点 P 是边 AB 上异于 A, B 的一点, 光线从点 P 出发, 经 BC, CA 反射后又回到点 P (如图). 若光线 QR 经过 $\triangle ABC$ 的重心, 则 AP 等于 ( )



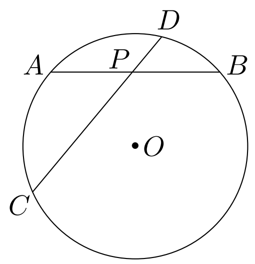
(A) 2 (B) 1 (C) $\dfrac{8}{3}$ (D) $\dfrac{4}{3}$

二、填空题

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若直线 l : $\begin{cases}x=t,\\ y=t-a,\end{cases}$ (t 为参数) 过椭圆 C : $\begin{cases}x=3\cos\varphi,\\ y=2\sin\varphi,\end{cases}$ (φ 为参数) 的右顶点, 则常数 a 的值为______.

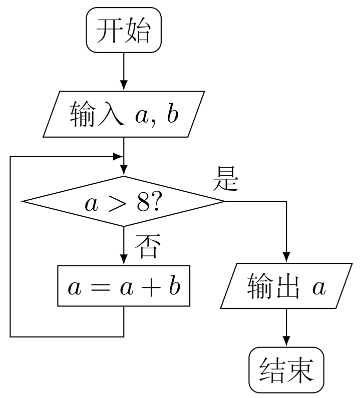
10. 已知 a, b, $c\in\mathbf{R}$, $a+2b+3c=6$, 则 $a^2+4b^2+9c^2$ 的最小值为______.

11. 如图, 在半径为 $\sqrt{7}$ 的 $\odot O$ 中, 弦 AB, CD 相交于点 P, $PA=PB=2$, $PD=1$, 则圆心 O 到弦 CD 的距离为______.



12. 若 $\displaystyle\int_0^T x^2\mathrm{d}x=9$, 则常数 T 的值为______.

13. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $a=1$, $b=2$, 则输出的 a 的值为______.



14. 设 F_1, F_2 是双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两个焦点, P 是 C 上一点, 若 $|PF_1|+|PF_2|=6a$, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的最小内角为 30°, 则 C 的离心率为______.

15. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n=(-1)^n a_n-\dfrac{1}{2^n}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则

(1) $a_3=$______; (2) $S_1+S_2+\cdots+S_{100}=$______.

16. 设函数 $f(x)=a^x+b^x-c^x$, 其中 $c>a>0$, $c>b>0$.

(1) 记集合 $M=\{(a,b,c)\mid a,\ b,\ c$ 不能构成一个三角形的三条边长, 且 $a=b\}$, 则 $(a,b,c)\in M$ 所对应的 $f(x)$ 的零点的取值集合为______;

(2) 若 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长, 则下列结论正确的是______. (写出所有正确结论的序号)

① $\forall x\in(-\infty,1)$, $f(x)>0$;

② $\exists x\in\mathbf{R}$, 使 a^x, b^x, c^x 不能构成一个三角形的三条边长;

③ 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 则 $\exists x\in(1,2)$, 使 $f(x)=0$.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $g(x)=2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

(1) 若 α 是第一象限角, 且 $f(\alpha)=\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$, 求 $g(\alpha)$ 的值;

(2) 求使 $f(x)\geqslant g(x)$ 成立的 x 的取值集合.

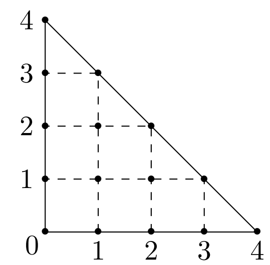
18. 某人在如图所示的直角边长为 4 米的三角形地块的每个格点 (指纵、横直线的交叉点以及三角形的顶点) 处都种了一株相同品种的作物. 根据历年的种植经验, 一株该种作物的年收获量 Y (单位: kg) 与它的“相近”作物株数 X 之间的关系如下表所示:

X	1	2	3	4
Y	51	48	45	42

这里, 两株作物“相近”是指它们之间的直线距离不超过 1 米.

(1) 从三角形地块的内部和边界上分别随机选取一株作物, 求它们恰好“相近”的概率;

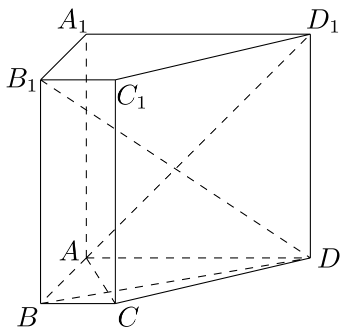
(2) 从所种作物中随机选取一株, 求它的年收获量的分布列与数学期望.



19. 如图, 在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle BAD=90°$, $AC \perp BD$, $BC=1$, $AD=AA_1=3$.

(1) 证明: $AC \perp B_1D$;

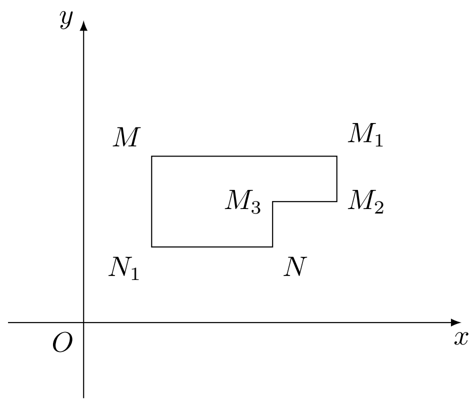
(2) 求直线 B_1C_1 与平面 ACD_1 所成角的正弦值.



20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 将从点 M 出发沿纵、横方向到达点 N 的任一路径称为 M 到 N 的一条"L 路径". 如图所示的路径 $MM_1M_2M_3N$ 与路径 MN_1N 都是 M 到 N 的"L 路径". 某地有三个新建的居民区, 分别位于平面 xOy 内三点 $A(3,20)$, $B(-10,0)$, $C(14,0)$ 处. 现计划在 x 轴上方区域 (包含 x 轴) 内的某一点 P 处修建一个文化中心.

(1) 写出点 P 到居民区 A 的"L 路径"长度最小值的表达式 (不要求证明);

(2) 若以原点 O 为圆心, 半径为 1 的圆的内部是保护区, "L 路径"不能进入保护区, 请确定点 P 的位置, 使其到三个居民区的"L 路径"长度之和最小.



21. 过抛物线 E: $x^2=2py\ (p>0)$ 的焦点 F 作斜率分别为 k_1, k_2 的两条不同的直线 l_1, l_2, 且 $k_1+k_2=2$, l_1 与 E 相交于点 A, B, l_2 与 E 相交于点 C, D. 以 AB, CD 为直径的圆 M, 圆 N (M, N 为圆心) 的公共弦所在的直线记为 l.

(1) 若 $k_1>0$, $k_2>0$, 证明; $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}<2p^2$;

(2) 若点 M 到直线 l 的距离的最小值为 $\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$, 求抛物线 E 的方程.

22. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=\left|\dfrac{x-a}{x+2a}\right|$.

(1) 记 $f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上的最大值为 $g(a)$, 求 $g(a)$ 的表达式;

(2) 是否存在 a, 使函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,4)$ 内的图象上存在两点, 在该两点处的切线相互垂直? 若存在, 求 a 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.