

## 2013 普通高等学校招生考试 (福建卷理)

### 一、选择题

1. 已知复数  $z$  的共轭复数  $\bar{z} = 1 + 2i$  ( $i$  为虚数单位), 则  $z$  在复平面内对应的点位于 ( )

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

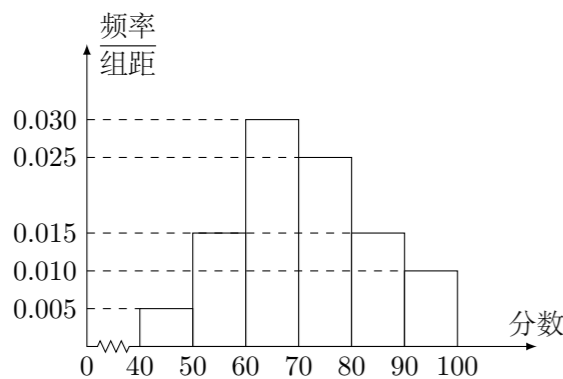
2. 已知集合  $A = \{1, a\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ , 则“ $a = 3$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的 ( )

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 双曲线  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  的顶点到渐近线的距离等于 ( )

- (A)  $\frac{2}{5}$  (B)  $\frac{4}{5}$  (C)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  (D)  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

4. 某校从高一年级学生中随机抽取部分学生, 将他们的模块测试成绩分成 6 组:  $[40, 50)$ ,  $[50, 60)$ ,  $[60, 70)$ ,  $[70, 80)$ ,  $[80, 90)$ ,  $[90, 100)$  加以统计, 得到如图所示的频率分布直方图. 已知高一年级共有学生 600 名, 据此估计, 该模块测试成绩不少于 60 分的学生人数为 ( )



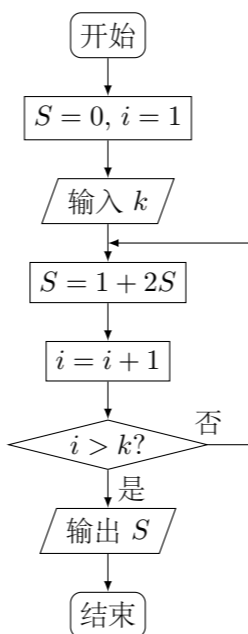
- (A) 588 (B) 480 (C) 450 (D) 120

5. 满足  $a, b \in \{-1, 0, 1, 2\}$ , 且关于  $x$  的方程  $ax^2 + 2x + b = 0$  有实数解的有序数对  $(a, b)$  的个数为 ( )

- (A) 14 (B) 13 (C) 12 (D) 10

6. 阅读如图所示的程序框图, 若输入的  $k = 10$ , 则该算法的功能是 ( )

- (A) 计算数列  $\{2^{n-1}\}$  的前 10 项和  
(B) 计算数列  $\{2^{n-1}\}$  的前 9 项和  
(C) 计算数列  $\{2^n - 1\}$  的前 10 项和  
(D) 计算数列  $\{2^n - 1\}$  的前 9 项和



7. 在四边形  $ABCD$  中,  $\vec{AC} = (1, 2)$ ,  $\vec{BD} = (-4, 2)$ , 则该四边形的面积为 ( )

- (A)  $\sqrt{5}$  (B)  $2\sqrt{5}$  (C) 5 (D) 10

8. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $x_0$  ( $x_0 \neq 0$ ) 是  $f(x)$  的极大值点, 以下结论一定正确的是 ( )

- (A)  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$  (B)  $-x_0$  是  $f(-x)$  的极小值点  
(C)  $-x_0$  是  $-f(x)$  的极小值点 (D)  $-x_0$  是  $-f(-x)$  的极小值点

9. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 记  $b_n = a_{m(n-1)+1} + a_{m(n-1)+2} + \dots + a_{m(n-1)+m}$ ,  $c_n = a_{m(n-1)+1} \cdot a_{m(n-1)+2} \cdot \dots \cdot a_{m(n-1)+m}$ , ( $m, n \in \mathbf{N}^*$ ), 则以下结论一定正确的是 ( )

- (A) 数列  $\{b_n\}$  为等差数列, 公差为  $q^m$   
(B) 数列  $\{b_n\}$  为等比数列, 公比为  $q^{2m}$   
(C) 数列  $\{c_n\}$  为等比数列, 公比为  $q^{m^2}$   
(D) 数列  $\{c_n\}$  为等比数列, 公比为  $q^{m^m}$

10. 设  $S, T$  是  $\mathbf{R}$  的两个非空子集, 如果存在一个从  $S$  到  $T$  的函数  $y = f(x)$  满足:

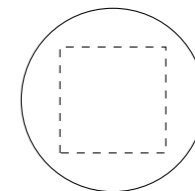
- ①  $T = \{f(x) | x \in S\}$ ;  
② 对任意  $x_1, x_2 \in S$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) < f(x_2)$ ;  
那么称这两个集合“保序同构”, 以下集合对不是“保序同构”的是 ( )

- (A)  $A = \mathbf{N}^*, B = \mathbf{N}$   
(B)  $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}, B = \{x | x = -8 \text{ 或 } 0 < x \leq 10\}$   
(C)  $A = \{x | 0 < x < 1\}, B = \mathbf{R}$   
(D)  $A = \mathbf{Z}, B = \mathbf{Q}$

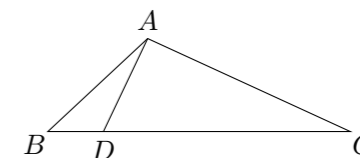
### 二、填空题

11. 利用计算机产生  $0 \sim 1$  之间的均匀随机数  $a$ , 则事件“ $3a - 1 > 0$ ”发生的概率为\_\_\_\_\_.

12. 已知某一多面体内接于球构成一个简单组合体, 如果该组合体的正视图、侧视图、俯视图均如图所示, 且图中的四边形是边长为 2 的正方形, 则该球的表面积是\_\_\_\_\_.



13. 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 已知点  $D$  在  $BC$  边上,  $AD \perp AC$ ,  $\sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $AD = 3$ , 则  $BD$  的长为\_\_\_\_\_.



14. 椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 焦距为  $2c$ , 若直线  $y = \sqrt{3}(x + c)$  与椭圆  $\Gamma$  的一个交点  $M$  满足  $\angle MF_1F_2 = 2\angle MF_2F_1$ , 则该椭圆的离心率等于\_\_\_\_\_.

15. 当  $x \in \mathbf{R}, |x| < 1$  时, 有如下表达式:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

两边同时积分得:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 1dx + \int_0^{\frac{1}{2}} xdx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx + \dots + \int_0^{\frac{1}{2}} x^ndx + \dots = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx,$$

从而得到如下等式:

$$1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \dots = \ln 2.$$

请根据以上材料所蕴含的数学思想方法, 计算:

$$C_n^0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} C_n^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} C_n^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \text{_____}.$$

### 三、解答题

16. 某联欢晚会举行抽奖活动, 举办方设置了甲、乙两种抽奖方案, 方案甲的中奖率为  $\frac{2}{3}$ , 中奖可以获得 2 分; 方案乙的中奖率为  $\frac{2}{5}$ , 中奖可以获得 3 分; 未中奖则不得分. 每人有且只有一次抽奖机会, 每次抽奖中奖与否互不影响, 晚会结束后凭分数兑换奖品.

(1) 若小明选择方案甲抽奖, 小红选择方案乙抽奖, 记他们的累计得分为  $X$ , 求  $X \leq 3$  的概率;

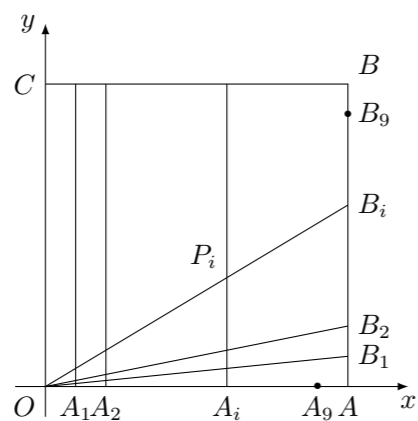
(2) 若小明、小红两人都选择方案甲或都选择方案乙进行抽奖, 问: 他们选择何种方案抽奖, 累计得分的数学期望较大?

17. 已知函数  $f(x) = x - a \ln x$  ( $a \in \mathbf{R}$ ).

- (1) 当  $a = 2$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $A(1, f(1))$  处的切线方程;
- (2) 求函数  $f(x)$  的极值.

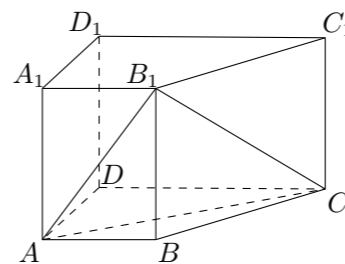
18. 如图, 在正方形  $OABC$  中,  $O$  为坐标原点, 点  $A$  的坐标为  $(10, 0)$ , 点  $C$  的坐标为  $(0, 10)$ . 分别将线段  $OA$  和  $AB$  十等分, 分点分别记为  $A_1, A_2, \dots, A_9$  和  $B_1, B_2, \dots, B_9$ , 连接  $OB_i$ , 过  $A_i$  作  $x$  轴的垂线与  $OB_i$  交于点  $P_i$  ( $i \in \mathbf{N}^*, 1 \leq i \leq 9$ ).

- (1) 求证: 点  $P_i$  ( $i \in \mathbf{N}^*, 1 \leq i \leq 9$ ) 都在同一条抛物线上, 并求该抛物线  $E$  的方程;
- (2) 过点  $C$  作直线  $l$  与抛物线  $E$  交于不同的两点  $M, N$ , 若  $\triangle OCM$  与  $\triangle OCN$  的面积之比为  $4:1$ , 求直线  $l$  的方程.



19. 如图, 在四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 侧棱  $AA_1 \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AB \parallel DC$ ,  $AA_1 = 1$ ,  $AB = 3k$ ,  $AD = 4k$ ,  $BC = 5k$ ,  $DC = 6k$  ( $k > 0$ ).

- (1) 求证:  $CD \perp$  平面  $ADD_1A_1$ ;
- (2) 若直线  $AA_1$  与平面  $AB_1C$  所成角的正弦值为  $\frac{6}{7}$ , 求  $k$  的值;
- (3) 现将与四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  形状和大小完全相同的两个四棱柱拼成一个新的四棱柱, 规定: 若拼成的新四棱柱形状和大小完全相同, 则视为同一种拼接方案, 问: 共有几种不同的拼接方案? 在这些拼接成的新四棱柱中, 记其中最小的表面积为  $f(k)$ , 写出  $f(k)$  的解析式. (直接写出答案, 不必说明理由)



20. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$ ) 的周期为  $\pi$ , 图象的一个对称中心为  $(\frac{\pi}{4}, 0)$ , 将函数  $f(x)$  图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向右平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位长度后得到函数  $g(x)$  的图象.

- (1) 求函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的解析式;
- (2) 是否存在  $x_0 \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ , 使得  $f(x_0), g(x_0), f(x_0)g(x_0)$  按照某种顺序成等差数列? 若存在, 请确定  $x_0$  的个数, 若不存在, 说明理由;
- (3) 求实数  $a$  与正整数  $n$ , 使得  $F(x) = f(x) + ag(x)$  在  $(0, n\pi)$  内恰有 2013 个零点.

21. 三选二.

**【A】** 已知直线  $l: ax + y = 1$  在矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  对应的变换作用下变为直线  $l': x + by = 1$ .

- (1) 求实数  $a, b$  的值;
- (2) 若点  $P(x_0, y_0)$  在直线  $l$  上, 且  $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ , 求点  $P$  的坐标.

**【B】** 在平面直角坐标系中, 以坐标原点为极点,  $x$  轴的非负半轴为极轴建立极坐标系. 已知点  $A$  的极坐标为  $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ , 直线  $l$  的极坐标方程为  $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = a$ , 且点  $A$  在直线  $l$  上.

- (1) 求  $a$  的值及直线  $l$  的直角坐标方程;
- (2) 圆  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha, \\ y = \sin \alpha, \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数), 试判断直线  $l$  与圆  $C$  的位置关系.

**【C】** 设不等式  $|x - 2| < a$  ( $a \in \mathbf{N}^*$ ) 的解集为  $A$ , 且  $\frac{3}{2} \in A, \frac{1}{2} \notin A$ .

- (1) 求  $a$  的值;
- (2) 求函数  $f(x) = |x + a| + |x - 2|$  的最小值.