2013 普通高等学校招生考试 (辽宁卷文)

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{x\mid |x|<2\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{0\}$ (B) $\{0,\ 1\}$ (C) $\{0,\ 2\}$ (D) $\{0,\ 1,\ 2\}$

2. 复数的 $z=\dfrac{1}{\mathrm{i}-1}$ 模为 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

3. 已知点 $A(1,3)$, $B(4,-1)$, 则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为 ( )

(A) $\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$ (B) $\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$ (C) $\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$ (D) $\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$

4. 下面是关于公差 $d>0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的四个命题:

p_1: 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列;

p_2: 数列 $\{na_n\}$ 是递增数列;

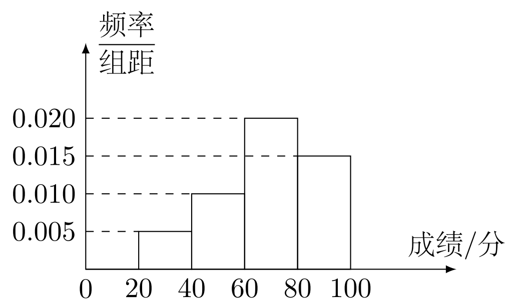
p_3: 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是递增数列;

p_4: 数列 $\{a_n+3nd\}$ 是递增数列.

其中的真命题为 ( )

(A) p_1, p_2 (B) p_3, p_4 (C) p_2, p_3 (D) p_1, p_4

5. 某班的全体学生参加英语测试, 成绩的频率分布直方图如图, 数据的分组依次为: $[20,40)$, $[40,60)$, $[60,80)$, $[80,100]$. 若低于 60 分的人数是 15, 则该班的学生人数是 ( )



(A) 45 (B) 50 (C) 55 (D) 60

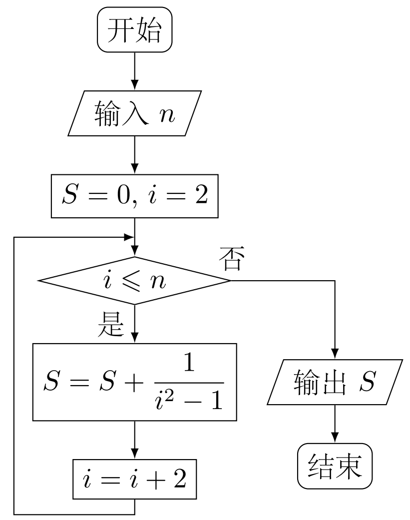
6. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 若 $a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\dfrac{1}{2}b$, 且 $a>b$, 则 $\angle B=$ ( )

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{2\pi}{3}$ (D) $\dfrac{5\pi}{6}$

7. 已知函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+9x^2}-3x\right)+1$, 则 $f(\lg 2)+f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)=$ ( )

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

8. 执行如图所示的程序框图, 若输入 $n=8$, 则输出 $S=$ ( )



(A) $\dfrac{4}{9}$ (B) $\dfrac{6}{7}$ (C) $\dfrac{8}{9}$ (D) $\dfrac{10}{11}$

9. 已知点 $O(0,0)$, $A(0,b)$, $B(a,a^3)$. 若 $\triangle OAB$ 为直角三角形, 则必有 ( )

(A) $b=a^3$ (B) $b=a^3+\dfrac{1}{a}$

(C) $(b-a^3)\left(b-a^3-\dfrac{1}{a}\right)=0$ (D) $|b-a^3|+\left|b-a^3-\dfrac{1}{a}\right|=0$

10. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的球面上. 若 $AB=3$, $AC=4$, $AB\perp AC$, $AA_1=12$, 则球 O 的半径为 ( )

(A) $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$ (B) $2\sqrt{10}$ (C) $\dfrac{13}{2}$ (D) $3\sqrt{10}$

11. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为 F, C 与过原点的直线相交于 A, B 两点, 连接 AF, BF, 若 $|AB|=10$, $|BF|=8$, $\cos\angle ABF=\dfrac{4}{5}$, 则 C 的离心率为 ( )

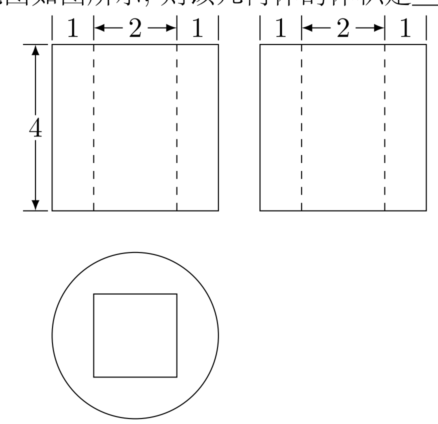
(A) $\dfrac{3}{5}$ (B) $\dfrac{5}{7}$ (C) $\dfrac{4}{5}$ (D) $\dfrac{6}{7}$

12. 已知函数 $f(x)=x^2-2(a+2)x+a^2$, $g(x)=-x^2+2(a-2)x-a^2+8$, 设 $H_1(x)=\max\{f(x),\ g(x)\}$, $H_2(x)=\min\{f(x),\ g(x)\}$ ($\max\{p,\ q\}$ 表示 p, q 中的较大值, $\min\{p,\ q\}$ 表示 p, q 中的较小值). 记 $H_1(x)$ 的最小值为 A, $H_2(x)$ 的最大值为 B, 则 $A-B=$ ( )

(A) 16 (B) -16 (C) $a^2-2a-16$ (D) $a^2+2a-16$

二、填空题

13. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是______.



14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 a_1, a_3 是方程 $x^2-5x+4=0$ 的两个根, 则 $S_6=$______.

15. 已知 F 为双曲线 C: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左焦点, P, Q 为 C 上的点. 若 PQ 的长等于虚轴长的 2 倍, 点 $A(5,0)$ 在线段 PQ 上, 则 $\triangle PQF$ 的周长为______.

16. 为了考察某校各班参加课外书法小组的人数, 从全校随机抽取 5 个班级, 把每个班级参加该小组的人数作为样本数据. 已知样本平均数为 7, 样本方差为 4, 且样本数据互不相同, 则样本数据中的最大值为______.

三、解答题

17. 设向量 $\boldsymbol{a}=\left(\sqrt{3}\sin x,\sin x\right)$, $\boldsymbol{b}=(\cos x,\sin x)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

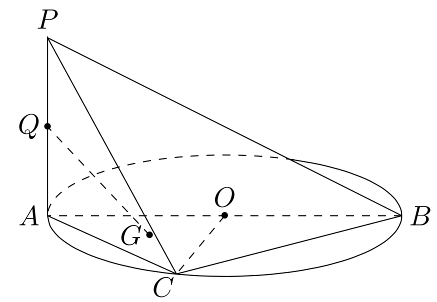
(1) 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, 求 x 的值;

(2) 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 求 $f(x)$ 的最大值.

18. 如图, AB 是圆的直径, PA 垂直圆所在的平面, C 是圆上的点.

(1) 求证: $BC\perp$ 平面 PAC;

(2) 设 Q 为 PA 的中点, G 为 $\triangle AOC$ 的重心, 求证: $QG\,/\!/$ 平面 PBC.



19. 现有 6 道题, 其中 4 道甲类题, 2 道乙类题, 张同学从中任取 2 道题解答. 试求:

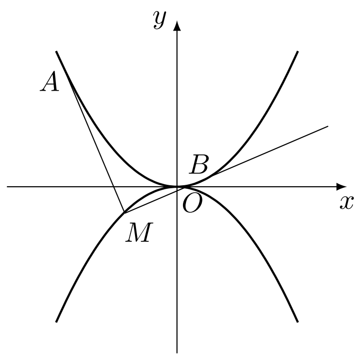
(1) 所取的 2 道题都是甲类题的概率;

(2) 所取的 2 道题不是同一类题的概率.

20. 如图, 抛物线 C_1: $x^2=4y$, C_2: $x^2=-2py\ (p>0)$. 点 $M(x_0,y_0)$ 在抛物线 C_2 上, 过 M 作 C_1 的切线, 切点为 A, B (M 为原点 O 时, A, B 重合于 O). 当 $x_0=1-\sqrt{2}$ 时, 切线 MA 的斜率为 $-\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 p 的值;

(2) 当 M 在 C_2 上运动时, 求线段 AB 中点 N 的轨迹方程 (A, B 重合于 O 时, 中点为 O).



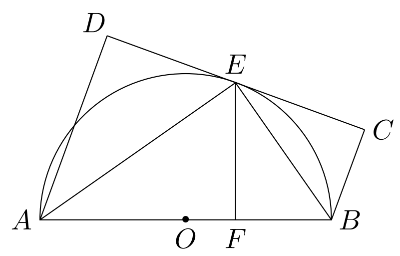
21. (1) 证明: 当 $x\in[0,1]$ 时, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\leqslant\sin x\leqslant x$;

(2) 若不等式 $ax+x^2+\dfrac{x^3}{2}+2(x+2)\cos x\leqslant 4$ 对 $x\in[0,1]$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

22. 如图, AB 为 $\odot O$ 直径, 直线 CD 与 $\odot O$ 相切于 E, AD 垂直 CD 于 D, BC 垂直 CD 于 C, EF 垂直 AB 于 F, 连接 AE, BE. 证明:

(1) $\angle FEB=\angle CEB$;

(2) $EF^2=AD\cdot BC$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 圆 C_1, 直线 C_2 的极坐标方程分别为 $\rho=4\sin\theta$, $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$.

(1) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标;

(2) 设 P 为 C_1 的圆心, Q 为 C_1 与 C_2 交点连线的中点, 已知直线 PQ 的参数方程为 $\begin{cases}x=t^3+a,\\ y=\dfrac{b}{2}t^3+1,\end{cases}$ ($t\in\mathbf{R}$ 为参数), 求 a, b 的值.

24. 已知函数 $f(x)=|x-a|$, 其中 $a>1$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 4-|x-4|$ 的解集;

(2) 已知关于 x 的不等式 $|f(2x+a)-2f(x)|\leqslant 2$ 的解集为 $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$, 求 a 的值.