2013 普通高等学校招生考试 (重庆卷理)

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, 集合 $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{2,\ 3\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$ ( )

(A) $\{1,\ 3,\ 4\}$ (B) $\{3,\ 4\}$ (C) $\{3\}$ (D) $\{4\}$

2. 命题"对任意 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $x^2\geqslant 0$"的否定为 ( )

(A) 对任意 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $x^2<0$ (B) 不存在 $x\in\mathbf{R}$, 使得 $x^2<0$

(C) 存在 $x_0\in\mathbf{R}$, 使得 $x_0^2\geqslant 0$ (D) 存在 $x_0\in\mathbf{R}$, 使得 $x_0^2<0$

3. $\sqrt{(3-a)(a+6)}$ $(-6\leqslant a\leqslant 3)$ 的最大值为 ( )

(A) 9 (B) $\dfrac{9}{2}$ (C) 3 (D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

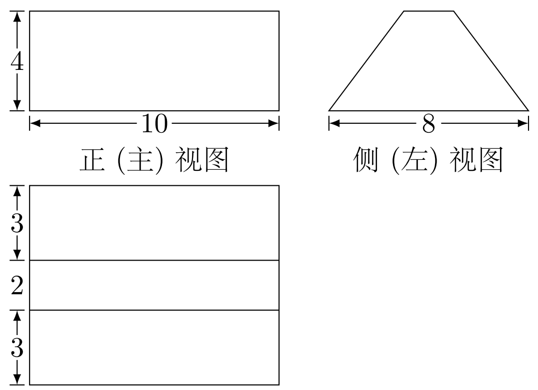
4. 以下茎叶图记录了甲、乙两组各 5 名学生在一次英语听力测试中的成绩 (单位: 分).

甲组		乙组
9	0	9
x 2	1	5 y 8
7 4	2	4

已知甲组数据的中位数为 15, 乙组数据的平均数为 16.8, 则 x, y 的值分别为 ( )

(A) 2, 5 (B) 5, 5 (C) 5, 8 (D) 8, 8

5. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )



正 (主) 视图 侧 (左) 视图

俯视图

(A) $\dfrac{560}{3}$ (B) $\dfrac{580}{3}$ (C) 200 (D) 240

6. 若 $a<b<c$, 则函数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ 的两个零点分别位于区间 ( )

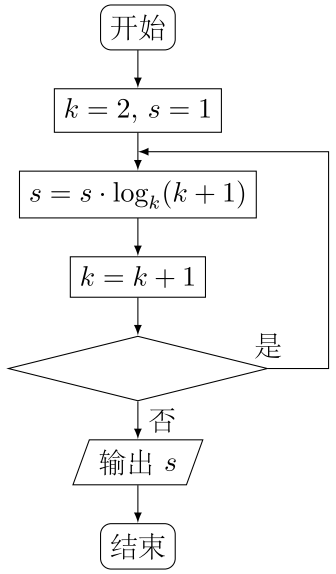
(A) (a,b) 和 (b,c) 内 (B) $(-\infty,a)$ 和 (a,b) 内

(C) (b,c) 和 $(c,+\infty)$ 内 (D) $(-\infty,a)$ 和 $(c,+\infty)$ 内

7. 已知圆 C_1: $(x-2)^2+(y-3)^2=1$, 圆 C_2: $(x-3)^2+(y-4)^2=9$, M, N 分别是圆 C_1, C_2 上的动点, P 为 x 轴上的动点, 则 $|PM|+|PN|$ 的最小值为 ( )

(A) $5\sqrt{2}-4$ (B) $\sqrt{17}-1$ (C) $6-2\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{17}$

8. 执行如图所示的程序框图, 如果输出 $s=3$, 那么判断框内应填入的条件是 ( )



(A) $k\leqslant 6$ (B) $k\leqslant 7$ (C) $k\leqslant 8$ (D) $k\leqslant 9$

9. $4\cos 50^\circ-\tan 40^\circ=$ ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{2}-1$

10. 在平面上, $\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$, $\left|\overrightarrow{OB_1}\right|=\left|\overrightarrow{OB_2}\right|=1$, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$. 若 $\left|\overrightarrow{OP}\right|<\dfrac{1}{2}$, 则 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 的取值范围是 ( )

(A) $\left(0,\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$ (B) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right]$ (C) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}\right]$ (D) $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}\right]$

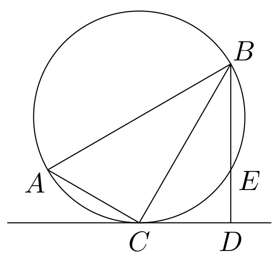
二、填空题

11. 已知复数 $z=\dfrac{5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ (i 是虚数单位), 则 $|z|=$______.

12. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1=1$, 公差 $d\neq 0$, S_n 为其前 n 项和, 若 a_1, a_2, a_5 成等比数列, 则 $S_8=$______.

13. 从 3 名骨科、4 名脑外科和 5 名内科医生中选派 5 人组成一个抗震救灾医疗小组, 则骨科、脑外科和内科医生都至少有 1 人的选派方法种数是______. (用数字作答)

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=60^\circ$, $AB=20$, 过 C 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 CD, $BD\perp CD$, BD 与外接圆交于点 E, 则 DE 的长为______.



15. 在直角坐标系 xOy 中, 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 若极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$ 的直线与曲线 $\begin{cases}x=t^2,\\ y=t^3,\end{cases}$ (t 为参数) 相交于 A, B 两点, 则 $|AB|=$______.

16. 若关于实数 x 的不等式 $|x-5|+|x+3|<a$ 无解, 则实数 a 的取值范围是______.

三、解答题

17. 设 $f(x)=a(x-5)^2+6\ln x$, 其中 $a\in\mathbf{R}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 y 轴相交于点 $(0,6)$.

(1) 确定 a 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

18. 某商场举行的"三色球"购物摸奖活动规定: 在一次摸奖中, 摸奖者先从装有 3 个红球与 4 个白球的袋中任意摸出 3 个球, 再从装有 1 个蓝球与 2 个白球的袋中任意摸出 1 个球, 根据摸出 4 个球中红球与蓝球的个数, 设一、二、三等奖如下:

奖级	摸出红、蓝球个数	获奖金额
一等奖	3 红 1 蓝	200 元
二等奖	3 红 0 蓝	50 元
三等奖	2 红 1 蓝	10 元

其余情况无奖且每次摸奖最多只能获得一个奖级.

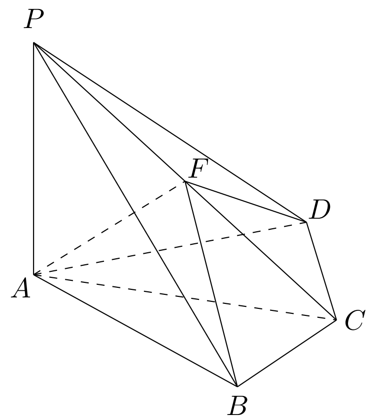
(1) 求一次摸球恰好摸到 1 个红球的概率;

(2) 求摸奖者在一次摸奖中获奖金额 X 的分布列与期望 $E(X)$.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $BC=CD=2$, $AC=4$, $\angle ACB=\angle ACD=\dfrac{\pi}{3}$, F 为 PC 的中点, $AF\perp PB$.

(1) 求 PA 的长;

(2) 求二面角 $B-AF-D$ 的正弦值.



20. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c, 且 $a^2+b^2+\sqrt{2}ab=c^2$.

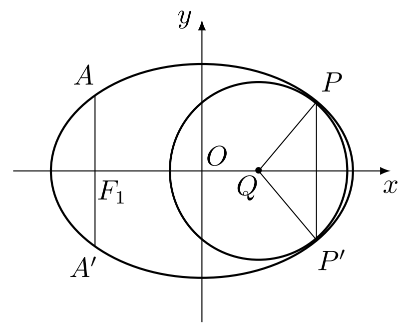
(1) 求 C;

(2) 设 $\cos A\cos B=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$, $\dfrac{\cos(\alpha+A)\cos(\alpha+B)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$, 求 $\tan\alpha$ 的值.

21. 如图, 椭圆的中心为原点 O, 长轴在 x 轴上, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 过左焦点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆于 A, A' 两点, $|AA'|=4$.

(1) 求该椭圆的标准方程;

(2) 取垂直于 x 轴的直线与椭圆相交于不同的两点 P, P', 过 P, P' 作圆心为 Q 的圆, 使椭圆上的其余点均在圆 Q 外. 若 $PQ\perp P'Q$, 求圆 Q 的标准方程.



22. 对正整数 n, 记 $I_n=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$, $P_n=\left\{\dfrac{m}{\sqrt{k}}\mid m\in I_n,\ k\in I_n\right\}$.

(1) 求集合 P_7 中元素的个数;

(2) 若 P_n 的子集 A 中任意两个元素之和不是整数的平方, 则称 A 为“稀疏集”. 求 n 的最大值, 使 P_n 能分成两个不相交的稀疏集的并.