

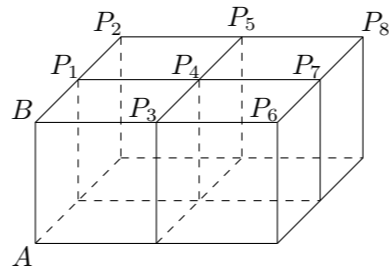
2014 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 函数 $y = 1 - 2\cos^2(2x)$ 的最小正周期是_____.
2. 若复数 $z = 1 + 2i$, 其中 i 是虚数单位, 则 $(z + \frac{1}{z}) \cdot \bar{z} =$ _____.
3. 若抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的右焦点重合, 则该抛物线的准线方程为_____.
4. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, a), \\ x^2, & x \in [a, +\infty), \end{cases}$ 若 $f(2) = 4$, 则 a 的取值范围为_____.
5. 若实数 x, y 满足 $xy = 1$, 则 $x^2 + 2y^2$ 的最小值为_____.
6. 若圆锥的侧面积是底面积的 3 倍, 则其母线与底面夹角的大小为_____. (结果用反三角函数值表示)
7. 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho(3\cos\theta - 4\sin\theta) = 1$, 则 C 与极轴的交点到极点的距离是_____.
8. 设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 若 $a_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_3 + a_4 + \dots + a_n)$, 则 $q =$ _____.
9. 若 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{2}}$, 则满足 $f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是_____.
10. 为强化安全意识, 某商场拟在未来的连续 10 天中随机选择 3 天进行紧急疏散演练, 则选择的 3 天恰好为连续 3 天的概率是_____. (结果用最简分数表示)
11. 已知互异的复数 a, b 满足 $ab \neq 0$, 集合 $\{a, b\} = \{a^2, b^2\}$, 则 $a + b =$ _____.
12. 设常数 a 使方程 $\sin x + \sqrt{3}\cos x = a$ 在闭区间 $[0, 2\pi]$ 上恰有三个解 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1 + x_2 + x_3 =$ _____.
13. 某游戏的得分为 1, 2, 3, 4, 5, 随机变量 ξ 表示小白玩该游戏的得分. 若 $E(\xi) = 4.2$, 则小白得 5 分的概率至少为_____.
14. 已知曲线 $C: x = -\sqrt{4 - y^2}$, 直线 $l: x = 6$. 若对于点 $A(m, 0)$, 存在 C 上的点 P 和 l 上的 Q 使得 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \vec{0}$, 则 m 的取值范围为_____.

二、选择题

15. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a + b > 4$ ”是“ $a > 2$ 且 $b > 2$ ”的 ()
 (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
16. 如图, 四个棱长为 1 的正方体排成一个正四棱柱, AB 是一条侧棱, P_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) 是上底面上其余的八个点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_i}$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) 的不同值的个数为 ()

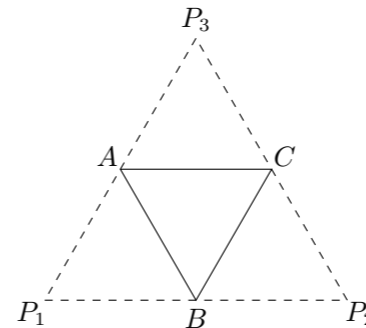


- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

17. 已知 $P_1(a_1, b_1)$ 与 $P_2(a_2, b_2)$ 是直线 $y = kx + 1$ (k 为常数) 上两个不同的点, 则关于 x 和 y 的方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = 1, \\ a_2x + b_2y = 1 \end{cases}$ 的解的情况是 ()
 (A) 无论 k, P_1, P_2 如何, 总是无解 (B) 无论 k, P_1, P_2 如何, 总有唯一解
 (C) 存在 k, P_1, P_2 , 使之恰有两解 (D) 存在 k, P_1, P_2 , 使之有无穷多解
18. 设 $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0, \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 则 a 的取值范围为 ()
 (A) $[-1, 2]$ (B) $[-1, 0]$ (C) $[1, 2]$ (D) $[0, 2]$

三、解答题

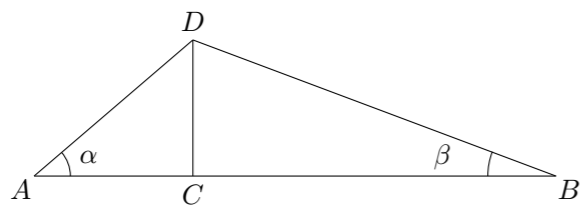
19. 底面边长为 2 的正三棱锥 $P-ABC$, 其表面展开图是三角形 $P_1P_2P_3$, 如图, 求 $\triangle P_1P_2P_3$ 的各边长及此三棱锥的体积 V .



20. 设常数 $a \geq 0$, 函数 $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x - a}$.

- (1) 若 $a = 4$, 求函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$;
- (2) 根据 a 的不同取值, 讨论函数 $y = f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

21. 如图, 某公司要在 A 、 B 两地连线上的定点 C 处建造广告牌 CD , 其中 D 为顶端, AC 长 35 米, CB 长 80 米. 设点 A 、 B 在同一水平面上, 从 A 和 B 看 D 的仰角分别为 α 和 β .
- (1) 设计中 CD 是铅垂方向. 若要求 $\alpha \geq 2\beta$, 问 CD 的长至多为多少 (结果精确到 0.01 米)?
- (2) 施工完成后, CD 与铅垂方向有偏差. 现在实测得 $\alpha = 38.12^\circ$, $\beta = 18.45^\circ$, 求 CD 的长 (结果精确到 0.01 米).



22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于直线 $l: ax + by + c = 0$ 和点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 记 $\eta = (ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c)$. 若 $\eta < 0$, 则称点 P_1 , P_2 被直线 l 分隔. 若曲线 C 与直线 l 没有公共点, 且曲线 C 上存在点 P_1 , P_2 被直线 l 分隔, 则称直线 l 为曲线 C 的一条分隔线.
- (1) 求证: 点 $A(1, 2)$, $B(-1, 0)$ 被直线 $x + y - 1 = 0$ 分隔;
- (2) 若直线 $y = kx$ 是曲线 $x^2 - 4y^2 = 1$ 的分隔线, 求实数 k 的取值范围;
- (3) 动点 M 到点 $Q(0, 2)$ 的距离与到 y 轴的距离之积为 1, 设点 M 的轨迹为 E , 求证: 通过原点的直线中, 有且仅有一条直线是 E 的分隔线.

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{3}a_n \leq a_{n+1} \leq 3a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 1$.
- (1) 若 $a_2 = 2$, $a_3 = x$, $a_4 = 9$, 求 x 的取值范围;
- (2) 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 若 $\frac{1}{3}S_n \leq S_{n+1} \leq 3S_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求 q 的取值范围;
- (3) 若 a_1, a_2, \dots, a_k 成等差数列, 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1000$, 求正整数 k 的最大值, 以及 k 取最大值时相应数列 a_1, a_2, \dots, a_k 的公差.