2014 普通高等学校招生考试 (四川卷理)

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2\leqslant 0\}$, 集合 B 为整数集, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$　(B) $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$

(C) $\{0,\ 1\}$　(D) $\{-1,\ 0\}$

2. 在 $x(1+x)^6$ 的展开式中, 含 x^3 项的系数为 ( )

(A) 30　(B) 20　(C) 15　(D) 10

3. 为了得到函数 $y=\sin(2x+1)$ 的图象, 只需把函数 $y=\sin 2x$ 的图象上所有的点 ( )

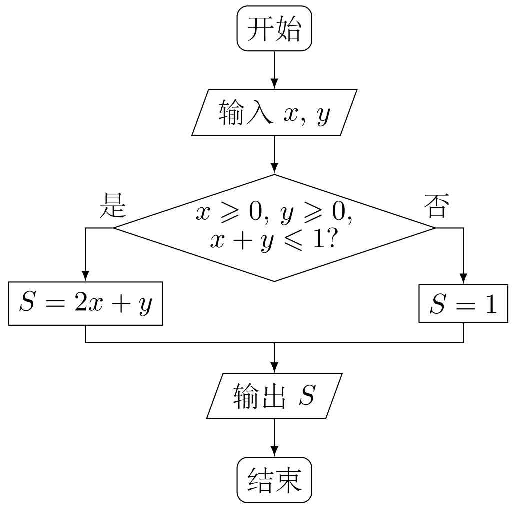
(A) 向左平行移动 $\dfrac{1}{2}$ 个单位长度　(B) 向右平行移动 $\dfrac{1}{2}$ 个单位长度

(C) 向左平行移动 1 个单位长度　(D) 向右平行移动 1 个单位长度

4. 若 $a>b>0$, $c<d<0$, 则一定有 ( )

(A) $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$　(B) $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}$　(C) $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$　(D) $\dfrac{a}{d}<\dfrac{b}{c}$

5. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 $x,\ y\in\mathbf{R}$, 则输出的 S 的最大值为 ( )



(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

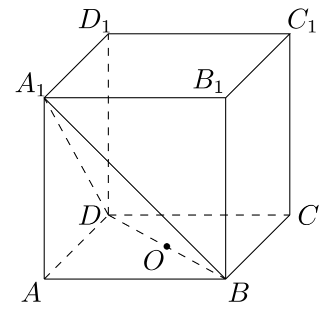
6. 六个人从左至右排成一行, 最左端只能排甲或乙, 最右端不能排甲, 则不同的排法共有 ( )

(A) 192 种　(B) 216 种　(C) 240 种　(D) 288 种

7. 平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(4,2)$, $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ $(m\in\mathbf{R})$, 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角等于 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 则 $m=$ ( )

(A) -2　(B) -1　(C) 1　(D) 2

8. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 O 为线段 BD 的中点. 设点 P 在线段 CC_1 上, 直线 OP 与平面 A_1BD 所成的角为 α, 则 $\sin\alpha$ 的取值范围是 ( )



(A) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right]$　(B) $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{3},1\right]$　(C) $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right]$　(D) $\left[\dfrac{2\sqrt{2}}{3},1\right]$

9. 已知 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$, $x\in(-1,1)$. 现有下列命题:

① $f(-x)=-f(x)$; ② $f\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)=2f(x)$; ③ $|f(x)|\geqslant 2|x|$.

其中所有正确命题的序号是 ( )

(A) ①②③　(B) ②③　(C) ①③　(D) ①②

10. 已知 F 是抛物线 $y^2=x$ 的焦点, 点 A, B 在该抛物线上且位于 x 轴的两侧, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ (其中 O 为坐标原点), 则 $\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值是 ( )

(A) 2　(B) 3　(C) $\dfrac{17\sqrt{2}}{8}$　(D) $\sqrt{10}$

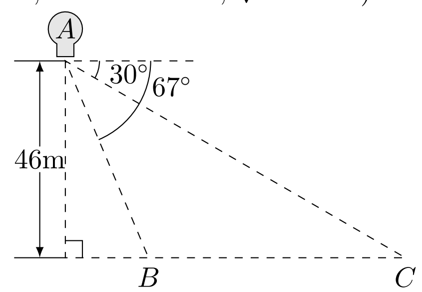
二、填空题

11. 复数 $\dfrac{2-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$______.

12. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的函数, 当 $x\in[-1,1)$ 时, $f(x)=\begin{cases}-4x^2+2, & -1\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\end{cases}$ 则 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=$______.

13. 如图, 从气球 A 上测得正前方的河流的两岸 B, C 的俯角分别为 67°, 30°, 此时气球的高是 46m, 则河流的宽度 BC 约等于______m.

(用四舍五入法将结果精确到个位. 参考数据: $\sin 67^\circ\approx 0.92$, $\cos 67^\circ\approx 0.39$, $\sin 37^\circ\approx 0.60$, $\cos 37^\circ\approx 0.80$, $\sqrt{3}\approx 1.73$)



14. 设 $m\in\mathbf{R}$, 过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$, 则 $|PA|\cdot|PB|$ 的最大值是______.

15. 以 A 表示值域为 $\mathbf{R}$ 的函数组成的集合, B 表示具有如下性质的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合: 对于函数 $\varphi(x)$, 存在一个正数 M, 使得函数 $\varphi(x)$ 的值域包含于区间 $[-M,M]$. 例如, 当 $\varphi_1(x)=x^3$, $\varphi_2(x)=\sin x$ 时, $\varphi_1(x)\in A$, $\varphi_2(x)\in B$. 现有如下命题:

① 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 则"$f(x)\in A$"的充要条件是"$\forall b\in\mathbf{R}$, $\exists a\in D$, $f(a)=b$";

② 函数 $f(x)\in B$ 的充要条件是 $f(x)$ 有最大值和最小值;

③ 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域相同, 且 $f(x)\in A$, $g(x)\in B$, 则 $f(x)+g(x)\notin B$;

④ 若函数 $f(x)=a\ln(x+2)+\dfrac{x}{x^2+1}$ $(x>-2,\ a\in\mathbf{R})$ 有最大值, 则 $f(x)\in B$.

其中的真命题有______. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若 α 是第二象限角, $f\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)=\dfrac{4}{5}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos 2\alpha$, 求 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值.

17. 一款击鼓小游戏的规则如下: 每盘游戏都需要击鼓三次, 每次击鼓要么出现一次音乐, 要么不出现音乐; 每盘游戏击鼓三次后, 出现一次音乐获得 10 分, 出现两次音乐获得 20 分, 出现三次音乐获得 100 分, 没有出现音乐则扣除 200 分 (即获得 -200 分). 设每次击鼓出现音乐的概率为 $\dfrac{1}{2}$, 且各次击鼓出现音乐相互独立.

(1) 设每盘游戏获得的分数为 X, 求 X 的分布列;

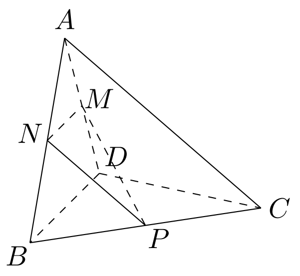
(2) 玩三盘游戏, 至少有一盘出现音乐的概率是多少?

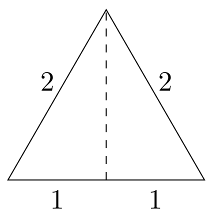
(3) 玩过这款游戏的许多人都发现, 若干盘游戏后, 与最初的分数相比, 分数没有增加反而减少了. 请运用概率统计的相关知识分析分数减少的原因.

18. 三棱锥 $A-BCD$ 及其侧视图、俯视图如图所示. 设 M, N 分别为线段 AD, AB 的中点, P 为线段 BC 上的点, 且 $MN \perp NP$.

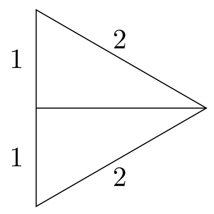
(1) 证明: P 为线段 BC 的中点;

(2) 求二面角 $A-NP-M$ 的余弦值.





侧视图



俯视图

19. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 点 (a_n, b_n) 在函数 $f(x) = 2^x$ 的图象上 $(n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 若 $a_1 = -2$, 点 $(a_8, 4b_7)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n;

(2) 若 $a_1 = 1$, 函数 $f(x)$ 的图象在点 (a_2, b_2) 处的切线在 x 轴上的截距为 $2 - \dfrac{1}{\ln 2}$, 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

20. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的焦距为 4, 其短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 F 为椭圆 C 的左焦点, T 为直线 $x = -3$ 上任意一点, 过 F 作 TF 的垂线交椭圆 C 于点 P, Q.

① 证明: OT 平分线段 PQ (其中 O 为坐标原点);

② 当 $\dfrac{|TF|}{|PQ|}$ 最小时, 求点 T 的坐标.

21. 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x - ax^2 - bx - 1$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e} = 2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

(1) 设 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值;

(2) 若 $f(1) = 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点, 求 a 的取值范围.