

2014 普通高等学校招生考试 (大纲卷理)

一、选择题

1. 设 $z = \frac{10i}{3+i}$, 则 z 的共轭复数为 ()
 (A) $-1+3i$ (B) $-1-3i$ (C) $1+3i$ (D) $1-3i$
2. 设集合 $M = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\}$, $N = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$, 则 $M \cap N =$ ()
 (A) $(0, 4]$ (B) $[0, 4)$ (C) $[-1, 0)$ (D) $(-1, 0]$
3. 设 $a = \sin 33^\circ$, $b = \cos 55^\circ$, $c = \tan 35^\circ$, 则 ()
 (A) $a > b > c$ (B) $b > c > a$ (C) $c > b > a$ (D) $c > a > b$
4. 若向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 满足: $|\mathbf{a}| = 1$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$, $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{b}| =$ ()
 (A) 2 (B) $\sqrt{2}$ (C) 1 (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. 有 6 名男医生、5 名女医生, 从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组, 则不同的选法共有 ()
 (A) 60 种 (B) 70 种 (C) 75 种 (D) 150 种
6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过 F_2 的直线 l 交 C 于 A 、 B 两点, 若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$, 则 C 的方程为 ()
 (A) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ (B) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ (C) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ (D) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$
7. 曲线 $y = xe^{x-1}$ 在点 $(1, 1)$ 处切线的斜率等于 ()
 (A) $2e$ (B) e (C) 2 (D) 1
8. 正四棱锥的顶点都在同一球面上, 若该棱锥的高为 4, 底面边长为 2, 则该球的表面积为 ()
 (A) $\frac{81\pi}{4}$ (B) 16π (C) 9π (D) $\frac{27\pi}{4}$
9. 已知双曲线 C 的离心率为 2, 焦点为 F_1 、 F_2 , 点 A 在 C 上, 若 $|F_1A| = 2|F_2A|$, 则 $\cos \angle AF_2F_1 =$ ()
 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
10. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 = 2$, $a_5 = 5$, 则数列 $\{\lg a_n\}$ 的前 8 项和等于 ()
 (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3
11. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 60° , $AB \subset \alpha$, $AB \perp l$, A 为垂足, $CD \subset \beta$, $C \in l$, $\angle ACD = 135^\circ$, 则异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值为 ()
 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$
12. 函数 $y = f(x)$ 的图象与函数 $y = g(x)$ 的图象关于直线 $x + y = 0$ 对称, 则 $y = f(x)$ 的反函数是 ()
 (A) $y = g(x)$ (B) $y = g(-x)$ (C) $y = -g(x)$ (D) $y = -g(-x)$

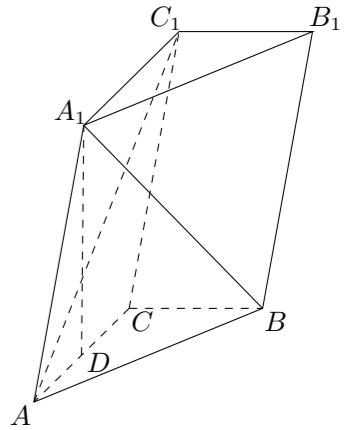
二、填空题

13. $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^2y^2 的系数为_____. (用数字作答)
14. 设 x 、 y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ x + 2y \leq 3, \\ x - 2y \leq 1, \end{cases}$ 则 $z = x + 4y$ 的最大值为_____.
15. 直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的两条切线, 若 l_1 与 l_2 的交点为 $(1, 3)$, 则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于_____.
16. 若函数 $f(x) = \cos 2x + a \sin x$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 已知 $3a \cos C = 2c \cos A$, $\tan A = \frac{1}{3}$, 求 B .
18. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = 10$, a_2 为整数, 且 $S_n \leq S_4$.
 (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 点 A_1 在平面 ABC 内的射影 D 在 AC 上, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 1$, $AC = CC_1 = 2$.
 (1) 证明: $AC_1 \perp A_1B$;
 (2) 设直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 的距离为 $\sqrt{3}$, 求二面角 $A_1 - AB - C$ 的大小.



20. 设每个工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6、0.5、0.5、0.4, 各人是否需使用设备相互独立.
- (1) 求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率;
- (2) X 表示同一工作日需使用设备的人数, 求 X 的数学期望.
21. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 直线 $y = 4$ 与 y 轴的交点为 P , 与 C 的交点为 Q , 且 $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$.
- (1) 求 C 的方程;
- (2) 过 F 的直线 l 与 C 相交于 A 、 B 两点, 若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M 、 N 两点, 且 A 、 M 、 B 、 N 四点在同一圆上, 求 l 的方程.
22. 函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{ax}{x+a}$ ($a > 1$).
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \ln(a_n + 1)$, 证明: $\frac{2}{n+2} < a_n \leq \frac{3}{n+2}$.