2014 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

一、选择题

1. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{7+\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $1-\mathrm{i}$ (B) $-1+\mathrm{i}$ (C) $\dfrac{17}{25}+\dfrac{31}{25}\mathrm{i}$ (D) $-\dfrac{17}{7}+\dfrac{25}{7}\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-2\geqslant 0, \\ x-y-2\leqslant 0, \\ y\geqslant 1, \end{cases}$ 则目标函数 $z=x+2y$ 的最小值为 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

3. 已知命题 p: $\forall x>0$, 总有 $(x+1)\,\mathrm{e}^x>1$, 则 $\neg p$ 为 ( )

(A) $\exists x_0\leqslant 0$, 使得 $(x_0+1)\,\mathrm{e}^{x_0}\leqslant 1$ (B) $\exists x_0>0$, 使得 $(x_0+1)\,\mathrm{e}^{x_0}\leqslant 1$

(C) $\forall x>0$, 总有 $(x+1)\,\mathrm{e}^x\leqslant 1$ (D) $\forall x\leqslant 0$, 总有 $(x+1)\,\mathrm{e}^x\leqslant 1$

4. 设 $a=\log_2\pi$, $b=\log_{\frac{1}{2}}\pi$, $c=\pi^{-2}$, 则 ( )

(A) $a>b>c$ (B) $b>a>c$ (C) $a>c>b$ (D) $c>b>a$

5. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1, 公差为 -1 的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 S_1, S_2, S_4 成等比数列, 则 $a_1=$ ( )

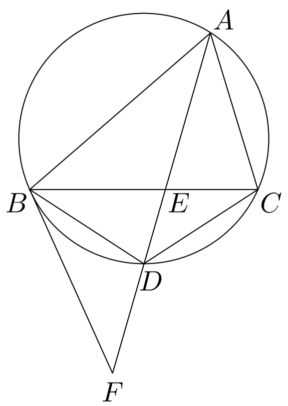
(A) 2 (B) -2 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $-\dfrac{1}{2}$

6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线平行于直线 $l: y=2x+10$, 双曲线的一个焦点在直线 l 上, 则双曲线的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$

(C) $\dfrac{3x^2}{25}-\dfrac{3y^2}{100}=1$ (D) $\dfrac{3x^2}{100}-\dfrac{3y^2}{25}=1$

7. 如图, $\triangle ABC$ 是圆的内接三角形, $\angle BAC$ 的平分线交圆于点 D, 交 BC 于 E, 过点 B 的圆的切线与 AD 的延长线交于点 F, 在上述条件下, 给出下列四个结论: ① BD 平分 $\angle CBF$; ② $FB^2=FD{\cdot}FA$; ③ $AE{\cdot}CE=BE{\cdot}DE$; ④ $AF\cdot BD=AB\cdot BF$. 则所有正确结论的序号是 ( )



(A) ①② (B) ③④ (C) ①②③ (D) ①②④

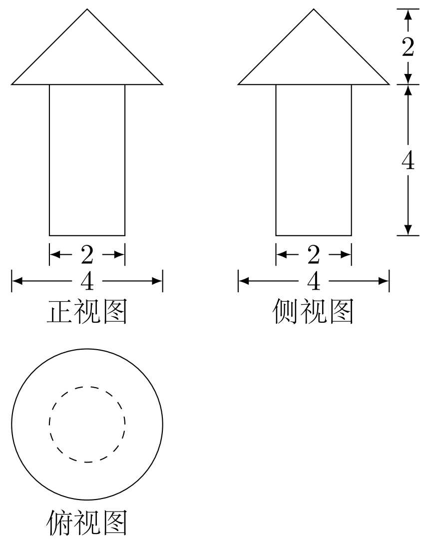
8. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x$ $(\omega>0)$, $x\in\mathbf{R}$. 在曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 的交点中, 若相邻交点距离的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{2\pi}{3}$ (C) π (D) 2π

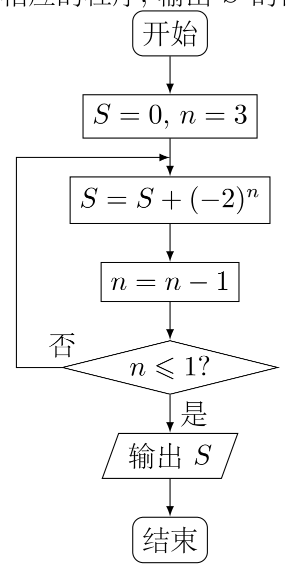
二、填空题

9. 某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向, 拟采用分层抽样的方法, 从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为 300 的样本进行调查. 已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为 $4:5:5:6$, 则应从一年级本科生中抽取______名学生.

10. 已知一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为______m^3.



11. 阅读如图的框图, 运行相应的程序, 输出 S 的值为______.



12. 函数 $f(x)=\lg x^2$ 的单调递减区间是______.

13. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD=120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, DC 上, $BC=3BE$, $DC=\lambda DF$. 若 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$, 则 λ 的值为______.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \left|x^2+5x+4\right|, & x\leqslant 0, \\ 2\left|x-2\right|, & x>0, \end{cases}$ 若函数 $y=f(x)-a\left|x\right|$ 恰有 4 个零点, 则实数 a 的取值范围为______.

三、解答题

15. 某校夏令营有 3 名男同学 A, B, C 和 3 名女同学 X, Y, Z, 其年级情况如下表:

	一年级	二年级	三年级
男同学	A	B	C
女同学	X	Y	Z

现从这 6 名同学中随机选出 2 人参加知识竞赛 (每人被选到的可能性相同).

(1) 用表中字母列举出所有可能的结果;

(2) 设 M 为事件"选出的 2 人来自不同年级且恰有 1 名男同学和 1 名女同学", 求事件 M 发生的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 已知 $a-c=\dfrac{\sqrt{6}}{6}b$, $\sin B=\sqrt{6}\sin C$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 求 $\cos\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

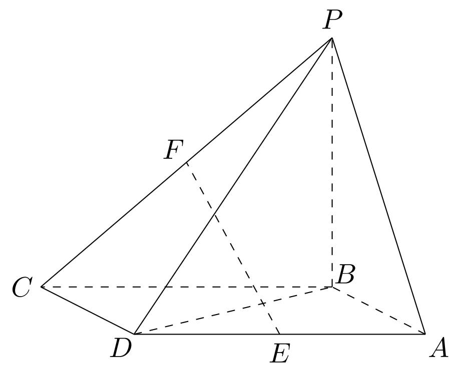
17. 如图, 四棱锥 $P\ ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形, $BA=BD=\sqrt{2}$, $AD=2$, $PA=PD=\sqrt{5}$, E, F 分别是棱 AD, PC 的中点.

(1) 证明: $EF\parallel$ 平面 PAB;

(2) 若二面角 $P-AD-B$ 为 $60°$,

① 证明: 平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$;

② 求直线 EF 与平面 PBC 所成角的正弦值.



18. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 右顶点为 A, 上顶点为 B, 已知 $|AB|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 设 P 为椭圆上异于其顶点的一点, 以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1, 经过点 F_2 的直线 l 与该圆相切与点 M, $|MF_2|=2\sqrt{2}$. 求椭圆的方程.

19. 已知函数 $f(x)=x^2-\dfrac{2}{3}ax^3\ (a>0)$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 若对于任意的 $x_1\in(2,+\infty)$, 都存在 $x_2\in(1,+\infty)$, 使得 $f(x_1)\cdot f(x_2)=1$, 求 a 的取值范围.

20. 已知 q 和 n 均为给定的大于 1 的自然数. 设集合 $M=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ q-1\}$, 集合 $A=\{x\mid x=x_1+x_2q+\cdots+x_nq^{n-1},\ x_i\in M,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$.

(1) 当 $q=2$, $n=3$ 时, 用列举法表示集合 A;

(2) 设 s, $t\in A$, $s=a_1+a_2q+\cdots+a_nq^{n-1}$, $t=b_1+b_2q+\cdots+b_nq^{n-1}$, 其中 a_i, $b_i\in M$, $i=1, 2, \cdots, n$. 证明: 若 $a_n<b_n$, 则 $s<t$.