

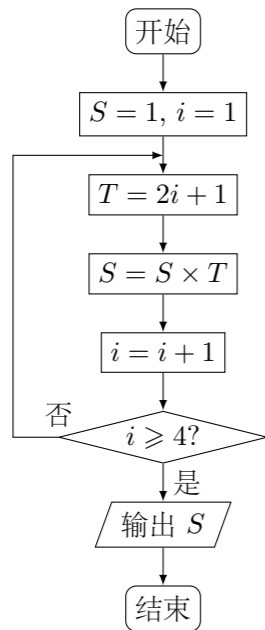
2014 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

1.  $i$  是虚数单位, 复数  $\frac{7+i}{3+4i} =$  ( )  
 (A)  $1-i$  (B)  $-1+i$  (C)  $\frac{17}{25} + \frac{31}{25}i$  (D)  $-\frac{17}{7} + \frac{25}{7}i$

2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y-2 \geq 0, \\ x-y-2 \leq 0, \\ y \geq 1, \end{cases}$  则目标函数  $z = x + 2y$  的最小值为 ( )  
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

3. 阅读下面的程序框图, 运行相应的程序, 输出的  $S$  的值为 ( )

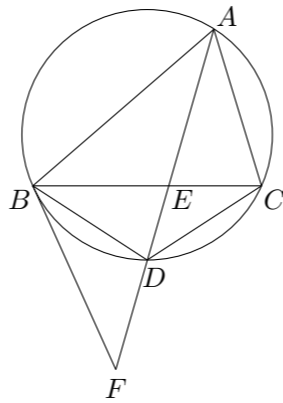


- (A) 15 (B) 105 (C) 245 (D) 945

4. 函数  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4)$  的单调递增区间是 ( )  
 (A)  $(0, +\infty)$  (B)  $(-\infty, 0)$  (C)  $(2, +\infty)$  (D)  $(-\infty, -2)$

5. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一条渐近线平行于直线  $l: y = 2x + 10$ , 双曲线的一个焦点在直线  $l$  上, 则双曲线的方程为 ( )  
 (A)  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$   
 (C)  $\frac{3x^2}{25} - \frac{3y^2}{100} = 1$  (D)  $\frac{3x^2}{100} - \frac{3y^2}{25} = 1$

6. 如图,  $\triangle ABC$  是圆的内接三角形,  $\angle BAC$  的平分线交圆于点  $D$ , 交  $BC$  于  $E$ , 过点  $B$  的圆的切线与  $AD$  的延长线交于点  $F$ , 在上述条件下, 给出下列四个结论: ①  $BD$  平分  $\angle CBF$ ; ②  $FB^2 = FD \cdot FA$ ; ③  $AE \cdot CE = BE \cdot DE$ ; ④  $AF \cdot BD = AB \cdot BF$ . 则所有正确结论的序号是 ( )



- (A) ①② (B) ③④ (C) ①②③ (D) ①②④

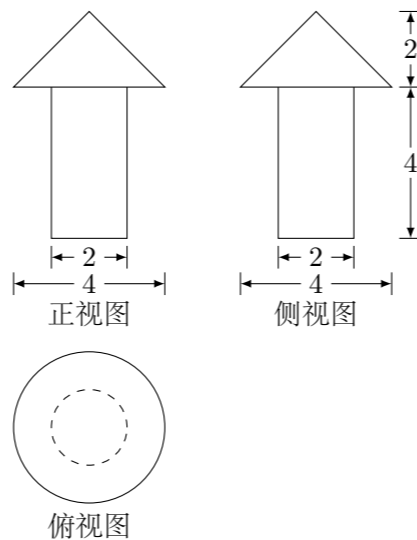
7. 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $a > b$ ”是“ $a|a| > b|b|$ ”的 ( )  
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 已知菱形  $ABCD$  的边长为 2,  $\angle BAD = 120^\circ$ , 点  $E, F$  分别在边  $BC, DC$  上,  $BE = \lambda BC, DF = \mu DC$ , 若  $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 1, \vec{CE} \cdot \vec{CF} = -\frac{2}{3}$ , 则  $\lambda + \mu =$  ( )  
 (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{5}{6}$  (D)  $\frac{7}{12}$

二、填空题

9. 某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向, 拟采用分层抽样的方法, 从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为 300 的样本进行调查. 已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为 4:5:5:6, 则应从一年级本科生中抽取\_\_\_\_\_名学生.

10. 已知一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为\_\_\_\_\_  $\text{m}^3$ .



11. 设  $\{a_n\}$  是首项为  $a_1$ , 公差为  $-1$  的等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和. 若  $S_1, S_2, S_4$  成等比数列, 则  $a_1$  的值为\_\_\_\_\_.

12. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ , 已知  $b - c = \frac{1}{4}a, 2\sin B = 3\sin C$ , 则  $\cos A$  的值为\_\_\_\_\_.

13. 在以  $O$  为极点的极坐标系中, 圆  $\rho = 4\sin\theta$  和直线  $\rho\sin\theta = a$  相交于  $A, B$  两点. 若  $\triangle AOB$  是等边三角形, 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = |x^2 + 3x|, x \in \mathbf{R}$ . 若方程  $f(x) - a|x-1| = 0$  恰有 4 个互异的实数根, 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

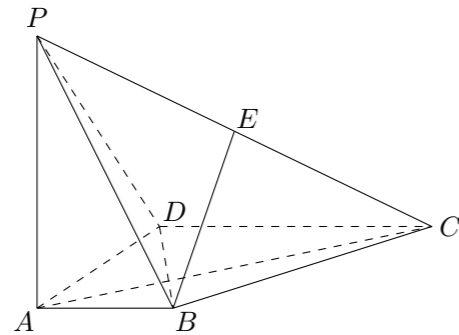
三、解答题

15. 已知函数  $f(x) = \cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}, x \in \mathbf{R}$ .  
 (1) 求  $f(x)$  的最小正周期;  
 (2) 求  $f(x)$  在闭区间  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  上的最大值和最小值.

16. 某大学志愿者协会有 6 名男同学, 4 名女同学. 在这 10 名同学中, 3 名同学来自数学学院, 其余 7 名同学来自物理、化学等其他互不相同的七个学院. 现从这 10 名同学中随机选取 3 名同学, 到希望小学进行支教活动 (每位同学被选到的可能性相同).

- (1) 求选出的 3 名同学是来自互不相同学院的概率;  
 (2) 设  $X$  为选出的 3 名同学中女同学的人数, 求随机变量  $X$  的分布列和数学期望.

17. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AD \perp AB$ ,  $AB \parallel DC$ ,  $AD = DC = AP = 2$ ,  $AB = 1$ , 点  $E$  为棱  $PC$  的中点.
- (1) 证明:  $BE \perp DC$ ;
  - (2) 求直线  $BE$  与平面  $PBD$  所成角的正弦值;
  - (3) 若  $F$  为棱  $PC$  上一点, 满足  $BF \perp AC$ , 求二面角  $F-AB-P$  的余弦值.



19. 已知  $q$  和  $n$  均为给定的大于 1 的自然数. 设集合  $M = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ , 集合  $A = \{x \mid x = x_1 + x_2q + \dots + x_nq^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\}$ .
- (1) 当  $q = 2, n = 3$  时, 用列举法表示集合  $A$ ;
  - (2) 设  $s, t \in A$ ,  $s = a_1 + a_2q + \dots + a_nq^{n-1}$ ,  $t = b_1 + b_2q + \dots + b_nq^{n-1}$ , 其中  $a_i, b_i \in M, i = 1, 2, \dots, n$ . 证明: 若  $a_n < b_n$ , 则  $s < t$ .
20. 已知函数  $f(x) = x - ae^x$  ( $a \in \mathbf{R}$ ),  $x \in \mathbf{R}$ , 已知函数  $y = f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ .
- (1) 求  $a$  的取值范围;
  - (2) 证明  $\frac{x_2}{x_1}$  随着  $a$  的减小而增大;
  - (3) 证明  $x_1 + x_2$  随着  $a$  的减小而增大.

18. 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 右顶点为  $A$ , 上顶点为  $B$ , 已知  $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1F_2|$ .
- (1) 求椭圆的离心率;
  - (2) 设  $P$  为椭圆上异于其顶点的一点, 以线段  $PB$  为直径的圆经过点  $F_1$ , 经过原点  $O$  的直线  $l$  与该圆相切. 求直线  $l$  的斜率.