2014 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\mid -1<x<3\}$, $N=\{x\mid -2<x<1\}$, 则 $M\cap N=$( )

(A) $(-2,1)$ (B) $(-1,1)$ (C) $(1,3)$ (D) $(-2,3)$

2. 若 $\tan\alpha>0$, 则 ( )

(A) $\sin 2\alpha>0$ (B) $\cos\alpha>0$ (C) $\sin\alpha>0$ (D) $\cos 2\alpha>0$

3. 设 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}+\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 2

4. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3}=1\ (a>0)$ 的离心率为 2, 则 $a=$ ( )

(A) 2 (B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (D) 1

5. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论正确的是 ( )

(A) $f(x)|g(x)|$ 是奇函数 (B) $|f(x)|g(x)$ 是奇函数

(C) $f(x)g(x)$ 是偶函数 (D) $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

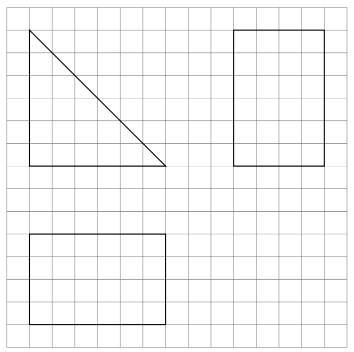
6. 设 D, E, F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 的中点, 则 $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=$ ( )

(A) $\overrightarrow{BC}$ (B) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (C) $\overrightarrow{AD}$ (D) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

7. 在函数① $y=\cos|2x|$, ② $y=|\cos x|$, ③ $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, ④ $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 中, 最小正周期为 π 的所有函数为 ( )

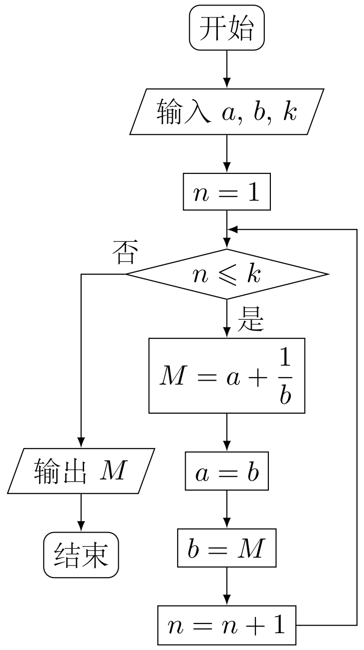
(A) ②④ (B) ①③④ (C) ①②③ (D) ①③

8. 如图, 网格纸的各小格都是正方形, 粗实线画出的是一个几何体的三视图, 则这个几何体是 ( )



(A) 三棱锥 (B) 三棱柱 (C) 四棱锥 (D) 四棱柱

9. 执行如图的程序框图, 若输入的 a, b, k 分别为 1, 2, 3, 则输出的 $M=$( )



(A) $\dfrac{20}{3}$ (B) $\dfrac{7}{2}$ (C) $\dfrac{16}{5}$ (D) $\dfrac{15}{8}$

10. 已知抛物线 C: $y^2=x$ 的焦点为 F, $A(x_0,y_0)$ 是 C 上一点, $|AF|=\dfrac{5}{4}x_0$, 则 $x_0=$ ( )

(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 8

11. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant a,\\ x-y\leqslant -1,\end{cases}$ 且 $z=x+ay$ 的最小值为 7, 则 $a=$ ( )

(A) -5 (B) 3 (C) -5 或 3 (D) 5 或 -3

12. 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$, 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0, 且 $x_0>0$, 则 a 的取值范围为 ( )

(A) $(-\infty,-2)$ (B) $(1,+\infty)$ (C) $(2,+\infty)$ (D) $(-\infty,-1)$

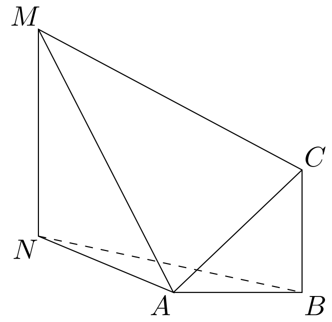
二、填空题

13. 将 2 本不同的数学书和 1 本语文书在书架上随机排成一行, 则 2 本数学书相邻的概率为______.

14. 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A, B, C 三个城市时, 甲说: 我去过的城市比乙多, 但没去过 B 城市; 乙说: 我没去过 C 城市; 丙说: 我们三人去过同一个城市. 由此可判断乙去过的城市为______.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-1}, & x<1,\\ x^{\frac{1}{3}}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则使得 $f(x)\leqslant 2$ 成立的 x 的取值范围是______.

16. 如图, 为测量山高 MN, 选择 A 和另一座山的山顶 C 为测量观测点. 从 A 点测得 M 点的仰角 $\angle MAN=60^\circ$, C 点的仰角 $\angle CAB=45^\circ$ 以及 $\angle MAC=75^\circ$; 从 C 点测得 $\angle MCA=60^\circ$. 已知山高 $BC=100$ m, 则山高 $MN=$______m.



三、解答题

17. 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列, a_2, a_4 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根.

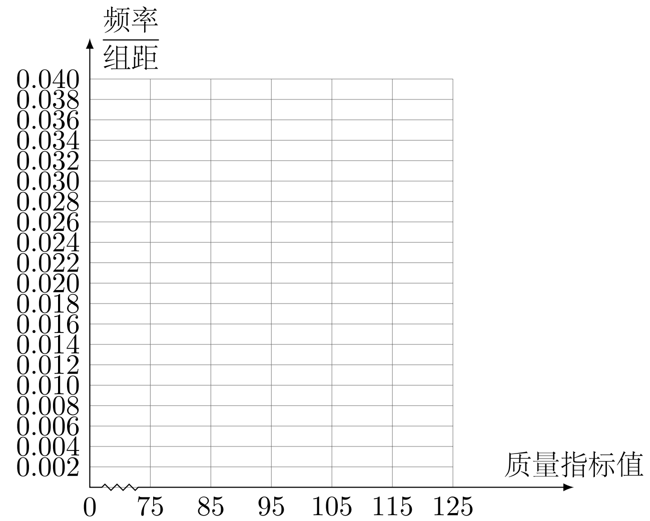
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和.

18. 从某企业生产的某种产品中抽取 100 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得如下频数分布表:

质量指标值分组	$[75,85)$	$[85,95)$	$[95,105)$	$[105,115)$	$[115,125)$
频数	6	26	38	22	8

(1) 作出这些数据的频率分布直方图;



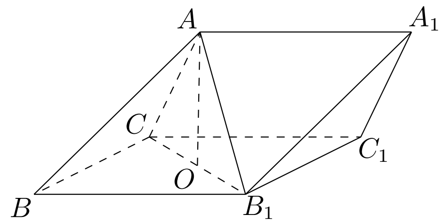
(2) 估计这种产品质量指标值的平均数及方差 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(3) 根据以上抽样调查数据, 能否认为该企业生产的这种产品符合"质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品的 80%"的规定?

19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BB_1C_1C 为菱形, B_1C 的中点为 O, 且 $AO \perp$ 平面 BB_1C_1C.

(1) 证明: $B_1C \perp AB$;

(2) 若 $AC \perp AB_1$, $\angle CBB_1 = 60^\circ$, $BC = 1$, 求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高.



20. 已知点 $P(2,2)$, 圆 C: $x^2+y^2-8y=0$, 过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M, O 为坐标原点.

(1) 求 M 的轨迹方程;

(2) 当 $|OP|=|OM|$ 时, 求 l 的方程及 $\triangle POM$ 的面积.

21. 设函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1-a}{2}x^2-bx\,(a\neq 1)$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 0.

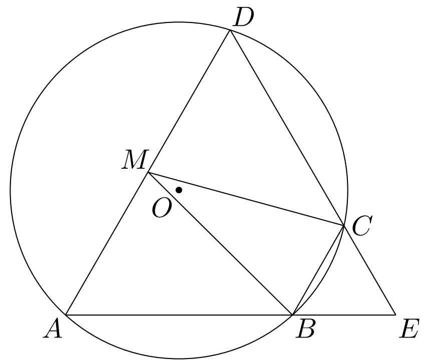
(1) 求 b;

(2) 若存在 $x_0 \geqslant 1$ 使得 $f(x_0)<\dfrac{a}{a-1}$, 求 a 的取值范围.

22. 如图, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, AB 的延长线与 DC 的延长线交于点 E, 且 $CB=CE$.

(1) 证明: $\angle D=\angle E$;

(2) 设 AD 不是 $\odot O$ 的直径, AD 的中点为 M, 且 $MB=MC$, 证明: $\triangle ADE$ 为等边三角形.



23. 已知曲线 C: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 直线 l: $\begin{cases}x=2+t,\\ y=2-2t,\end{cases}$ (t 为参数).

(1) 写出曲线 C 的参数方程, 直线 l 的普通方程;

(2) 过曲线 C 上任一点 P 作与 l 夹角为 30° 的直线, 交 l 于点 A, 求 $|PA|$ 的最大值与最小值.

24. 若 $a>0$, $b>0$, 且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

(1) 求 a^3+b^3 的最小值;

(2) 是否存在 a, b, 使得 $2a+3b=6$? 并说明理由.