2014 普通高等学校招生考试 (江西卷文)

一、选择题

1. 若复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z|=$ ( )

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

2. 设全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x\mid x^2-9<0\}$, $B=\{x\mid -1<x\leqslant 5\}$, 则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$ ( )

(A) $(-3,0)$ (B) $(-3,-1)$ (C) $(-3,-1]$ (D) $(-3,3)$

3. 掷两颗均匀的骰子, 则点数之和为 5 的概率等于 ( )

(A) $\dfrac{1}{18}$ (B) $\dfrac{1}{9}$ (C) $\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{1}{12}$

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} a\cdot 2^x, & x\geqslant 0, \\ 2^{-x}, & x<0, \end{cases}$ $(a\in\mathbf{R})$, 若 $f[f(-1)]=1$, 则 $a=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 若 $3a=2b$, 则 $\dfrac{2\sin^2 B-\sin^2 A}{\sin^2 A}$ 的值为 ( )

(A) $-\dfrac{1}{9}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) 1 (D) $\dfrac{7}{2}$

6. 下列叙述中正确的是 ( )

(A) 若 $a,b,c\in\mathbf{R}$, 则“$ax^2+bx+c\geqslant 0$”的充分条件是“$b^2-4ac\leqslant 0$”

(B) 若 $a,b,c\in\mathbf{R}$, 则“$ab^2>cb^2$”的充要条件是“$a>c$”

(C) 命题“对任意 $x\in\mathbf{R}$, 有 $x^2\geqslant 0$”的否定是“存在 $x\in\mathbf{R}$, 有 $x^2\geqslant 0$”

(D) l 是一条直线, α, β 是两个不同的平面, 若 $l\perp\alpha$, $l\perp\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$

7. 某人研究中学生的性别与成绩、视力、智商、阅读量这 4 个变量之间的关系, 随机抽查了 52 名中学生, 得到统计数据如表 1 至表 4, 则与性别有关联的可能性最大的变量是 ( )

成绩 / 性别	不及格	及格	总计
男	6	14	20
女	10	22	32
总计	16	36	52

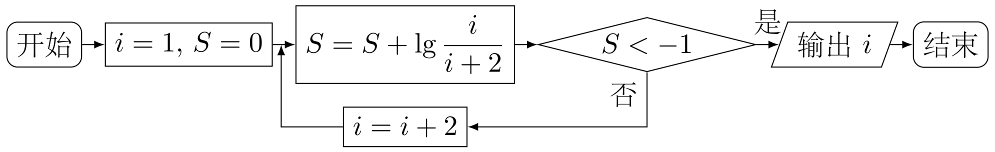
视力 / 性别	好	差	总计
男	4	16	20
女	12	20	32
总计	16	36	52

智商 / 性别	偏高	正常	总计
男	8	12	20
女	8	24	32
总计	16	36	52

阅读量 / 性别	丰富	不丰富	总计
男	14	6	20
女	2	30	32
总计	16	36	52

(A) 成绩 (B) 视力 (C) 智商 (D) 阅读量

8. 阅读如下程序框图, 运行相应的程序, 则程序运行后输出的结果为 ( )

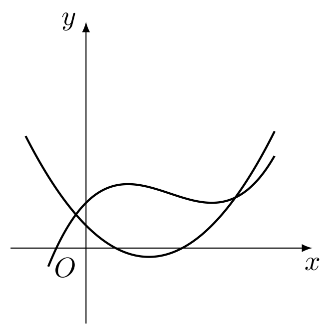


(A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 11

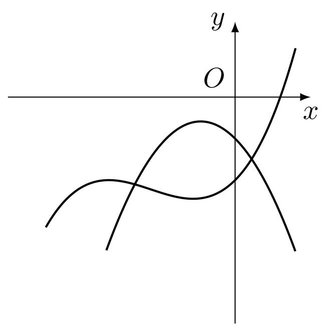
9. 过双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右顶点作 x 轴的垂线与 C 的一条渐近线相交于 A. 若以 C 的右焦点为圆心、半径为 4 的圆经过 A, O 两点 (O 为坐标原点), 则双曲线 C 的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{9}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$

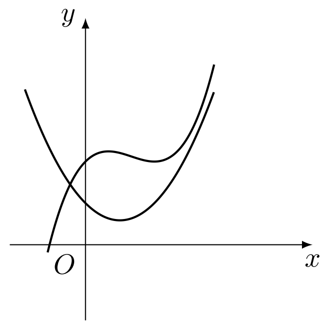
10. 在同一直角坐标系中, 函数 $y=ax^2-x+\dfrac{a}{2}$ 与 $y=a^2x^3-2ax^2+x+a$ $(a\in\mathbf{R})$ 的图象不可能的是 ( )



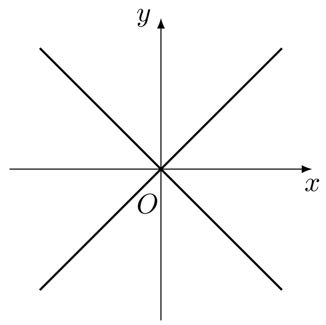
(A)



(B)



(C)



(D)

二、填空题

11. 若曲线 $y=x\ln x$ 上点 P 处的切线平行于直线 $2x-y+1=0$, 则点 P 的坐标是______.

12. 已知单位向量 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 α, 且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$, 向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$, 则 $|\boldsymbol{a}|=$______.

13. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=7$, 公差为 d, 前 n 项和为 S_n, 当且仅当 $n=8$ 时 S_n 取最大值, 则 d 的取值范围为______.

14. 设椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2, 过 F_2 作 x 轴的垂线与 C 交于 A, B 两点, F_1B 与 y 轴交于点 D, 若 $AD\perp F_1B$, 则椭圆 C 的离心率等于______.

15. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$, 若 $|x|+|y|+|x-1|+|y-1|\leqslant 2$, 则 $x+y$ 的取值范围为______.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=(a+2\cos^2 x)\cos(2x+\theta)$ 为奇函数, 且 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$, 其中 $a\in\mathbf{R}$, $\theta\in(0,\pi)$.

(1) 求 a, θ 的值;

(2) 若 $f\left(\dfrac{\alpha}{4}\right)=-\dfrac{2}{5}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 求 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{3n^2-n}{2}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 对任意 $n>1$, 都有 $m\in\mathbf{N}^*$, 使得 a_1, a_n, a_m 成等比数列.

18. 已知函数 $f(x)=(4x^2+4ax+a^2)\sqrt{x}$, 其中 $a<0$.

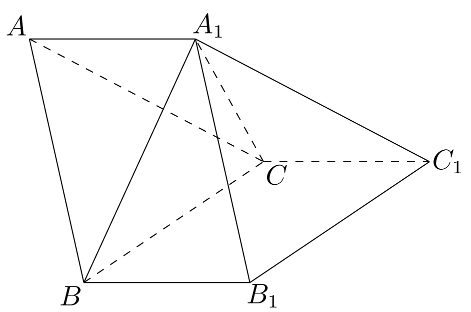
(1) 当 $a=-4$ 时, 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上的最小值为 8, 求 a 的值.

19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1\perp BC$, $A_1B\perp BB_1$.

(1) 求证: $A_1C\perp CC_1$;

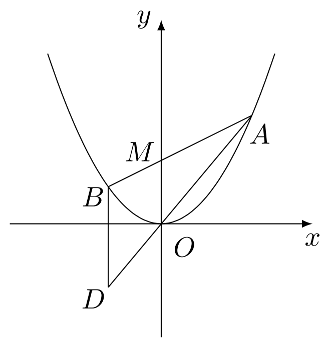
(2) 若 $AB=2$, $AC=\sqrt{3}$, $BC=\sqrt{7}$, 问 AA_1 为何值时, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 体积最大, 并求此最大值.



20. 如图, 已知抛物线 C: $x^2=4y$, 过点 $M(0,2)$ 任作一直线与 C 相交于 A, B 两点, 过点 B 作 y 轴的平行线与直线 AO 相交于点 D (O 为坐标原点).

(1) 证明: 动点 D 在定直线上;

(2) 作 C 的任意一条切线 l (不含 x 轴) 与直线 $y=2$ 相交于点 N_1, 与第一问中的定直线相交于点 N_2, 证明: $|MN_2|^2-|MN_1|^2$ 为定值, 并求此定值.



21. 将连续正整数 1, 2, $\cdots$, n $(n\in\mathbf{N}^*)$ 从小到大排列构成一个数 $123\cdots n$, $F(n)$ 为这个数的位数 (如 $n=12$ 时, 此数为 123456789101112, 共有 15 个数字, $F(12)=15$), 现从这个数中随机取一个数字, $p(n)$ 为恰好取到 0 的概率.

(1) 求 $p(100)$;

(2) 当 $n\leqslant 2014$ 时, 求 $F(n)$ 的表达式;

(3) 令 $g(n)$ 为这个数中数字 0 的个数, $f(n)$ 为这个数中数字 9 的个数, $h(n)=f(n)-g(n)$, $S=\{n\mid h(n)=1,\ n\leqslant 100,\ n\in\mathbf{N}^*\}$, 求当 $n\in S$ 时 $p(n)$ 的最大值.