

2014 普通高等学校招生考试 (湖北卷理)

一、选择题

1. i 为虚数单位, 则 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 =$ ()
 (A) -1 (B) 1 (C) $-i$ (D) i

2. 若二项式 $\left(2x + \frac{a}{x}\right)^7$ 的展开式中 $\frac{1}{x^3}$ 的系数是 84 , 则实数 $a =$ ()
 (A) 2 (B) $\sqrt[3]{4}$ (C) 1 (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

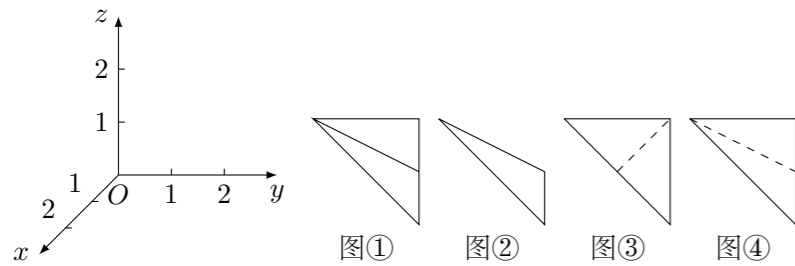
3. 设 U 为全集, A, B 是集合, 则“存在集合 C 使得 $A \subseteq C, B \subseteq \complement_U C$ ”是“ $A \cap B = \emptyset$ ”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 根据如下样本数据

x	3	4	5	6	7	8
y	4.0	2.5	-0.5	0.5	-2.0	-3.0

得到的回归方程为 $\hat{y} = bx + a$, 则 ()
 (A) $a > 0, b > 0$ (B) $a > 0, b < 0$ (C) $a < 0, b > 0$ (D) $a < 0, b < 0$

5. 在如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 一个四面体的顶点坐标分别是 $(0, 0, 2), (2, 2, 0), (1, 2, 1), (2, 2, 2)$. 给出编号为①②③④的四个图, 则该四面体的正视图和俯视图分别为 ()



(A) ①和② (B) ③和① (C) ④和③ (D) ④和②

6. 若函数 $f(x), g(x)$ 满足 $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0$, 则称 $f(x), g(x)$ 为区间 $[-1, 1]$ 上的一组正交函数, 给出三组函数:
 ① $f(x) = \sin \frac{1}{2}x, g(x) = \cos \frac{1}{2}x$;
 ② $f(x) = x + 1, g(x) = x - 1$;
 ③ $f(x) = x, g(x) = x^2$.
 其中为区间 $[-1, 1]$ 上的正交函数的组数是 ()
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

7. 由不等式组 $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \geq 0, \\ y - x - 2 \leq 0 \end{cases}$ 确定的平面区域记为 Ω_1 , 不等式组

$\begin{cases} x + y \leq 1, \\ x + y \geq -2 \end{cases}$ 确定的平面区域记为 Ω_2 , 在 Ω_1 中随机取一点, 则该点恰好在 Ω_2 内的概率为 ()

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{7}{8}$

8. 《算数书》竹简于上世纪八十年代在湖北省江陵县张家山出土, 这是我国现存最早的有系统的数学典籍, 其中记载有求“困盖”的术: 置如其周, 令相乘也. 又以高乘之, 三十六成一. 该术相当于给出了由圆锥的底面周长 L 与高 h , 计算其体积 V 的近似公式 $V \approx \frac{1}{36}L^2h$. 它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率 π 近似取为 3 . 那么, 近似公式 $V \approx \frac{2}{75}L^2h$ 相当于将圆锥体积公式中的 π 近似取为 ()

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{25}{8}$ (C) $\frac{157}{50}$ (D) $\frac{355}{113}$

9. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为 ()

(A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) 3 (D) 2

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}(|x - a^2| + |x - 2a^2| - 3a^2)$. 若 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x - 1) \leq f(x)$, 则实数 a 的取值范围为 ()

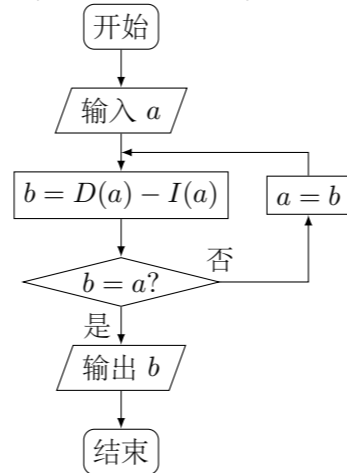
(A) $\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$ (B) $\left[-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right]$ (C) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ (D) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

二、填空题

11. 设向量 $\mathbf{a} = (3, 3), \mathbf{b} = (1, -1)$, 若 $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b})$, 则实数 $\lambda =$ _____.

12. 直线 $l_1: y = x + a$ 和 $l_2: y = x + b$ 将单位圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 分成长度相等的四段弧, 则 $a^2 + b^2 =$ _____.

13. 设 a 是一个各位数字都不是 0 且没有重复数字的三位数. 将组成 a 的 3 个数字按从小到大排成的三位数记为 $I(a)$, 按从大到小排成的三位数记为 $D(a)$ (例如 $a = 815$, 则 $I(a) = 158, D(a) = 851$). 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 任意输入一个 a , 输出的结果 $b =$ _____.



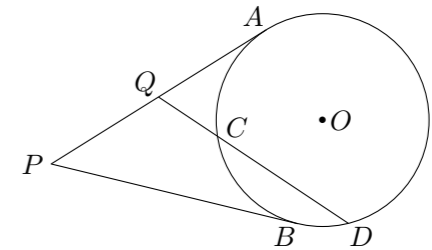
14. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数, 且 $f(x) > 0$, 对任意 $a > 0, b > 0$, 若经过点 $(a, f(a)), (b, -f(b))$ 的直线与 x 轴的交点为 $(c, 0)$, 则称 c 为 $a,$

b 关于函数 $f(x)$ 的平均数, 记为 $M_f(a, b)$, 例如, 当 $f(x) = 1 (x > 0)$ 时, 可得 $M_f(a, b) = c = \frac{a+b}{2}$, 即 $M_f(a, b)$ 为 a, b 的算术平均数.

(1) 当 $f(x) =$ _____ ($x > 0$) 时, $M_f(a, b)$ 为 a, b 的几何平均数;

(2) 当 $f(x) =$ _____ ($x > 0$) 时, $M_f(a, b)$ 为 a, b 的调和平均数 $\frac{2ab}{a+b}$. (以上两空各只需写出一个符合要求的函数即可)

15. 如图, P 为 $\odot O$ 外一点, 过 P 点作 $\odot O$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 过 PA 的中点 Q 作割线交 $\odot O$ 于 C, D 两点. 若 $QC = 1, CD = 3$, 则 $PB =$ _____.



16. 已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \frac{\sqrt{3t}}{3}, \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho = 2$, 则 C_1 与 C_2 交点的直角坐标为_____.

三、解答题

17. 某实验室一天的温度 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 随时间 t (单位: h) 的变化近似满足函数关系: $f(t) = 10 - \sqrt{3}\cos \frac{\pi}{12}t - \sin \frac{\pi}{12}t, t \in [0, 24)$.

(1) 求实验室这一天的最大温差;

(2) 若要求实验室温度不高于 11°C , 则在某段时间实验室需要降温?

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 2$, 且 a_1, a_2, a_5 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 是否存在正整数 n , 使得 $S_n > 60n + 800$? 若存在, 求出 n 的最小值; 若不存在, 说明理由.

20. 计划在某水库建一座至多安装 3 台发电机的水电站, 过去 50 年的水文资料显示, 水库年入流量 X (年入流量: 一年内上游来水与库区降水之和. 单位: 亿立方米) 都在 40 以上. 其中, 不足 80 的年份有 10 年, 不低于 80 且不超过 120 的年份有 35 年, 超过 120 的年份有 5 年. 将年入流量在以上三段的频率作为相应段的概率, 并假设各年的年入流量相互独立.

(1) 求未来 4 年中, 至多有 1 年的年入流量超过 120 的概率;

(2) 水电站希望安装的发电机尽可能运行, 但每年发电机最多可运行台数受年入流量 X 限制, 并有如下关系;

年入流量 X	$40 < X < 80$	$80 \leq X \leq 120$	$X > 120$
发电机最多可运行台数	1	2	3

若某台发电机运行, 则该台年利润为 5000 万元; 若某台发电机未运行, 则该台年亏损 800 万元, 欲使水电站年总利润的均值达到最大, 应安装发电机多少台?

22. π 为圆周率, $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数.

(1) 求函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的单调区间;

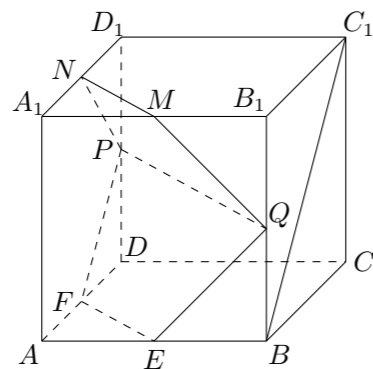
(2) 求 $e^3, 3^e, e^\pi, \pi^e, 3^\pi, \pi^3$ 这 6 个数中的最大数与最小数;

(3) 将 $e^3, 3^e, e^\pi, \pi^e, 3^\pi, \pi^3$ 这 6 个数按从小到大的顺序排列, 并证明你的结论.

19. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, M, N 分别是棱 AB, AD, A_1B_1, A_1D_1 的中点, 点 P, Q 分别在棱 DD_1, BB_1 上移动, 且 $DP = BQ = \lambda$ ($0 < \lambda < 2$).

(1) 当 $\lambda = 1$ 时, 证明: 直线 $BC_1 \parallel$ 平面 $EFPQ$;

(2) 是否存在 λ , 使平面 $EFPQ$ 与面 $PQMN$ 所成的二面角为直二面角? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.



21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 M 到点 $F(1, 0)$ 的距离比它到 y 轴的距离多 1, 记点 M 的轨迹为 C .

(1) 求轨迹为 C 的方程;

(2) 设斜率为 k 的直线 l 过定点 $P(-2, 1)$, 求直线 l 与轨迹 C 恰好有一个公共点, 两个公共点, 三个公共点时 k 的相应取值范围.