2014 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

一、选择题

1. 满足 $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z}=\mathrm{i}$ (i 为虚数单位) 的复数 $z=$ ( )

(A) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ (B) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ (C) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ (D) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

2. 对一个容量为 N 的总体抽取容量为 n 的样本, 当选取简单随机抽样、系统抽样和分层抽样三种不同方法抽取样本时, 总体中每个个体被抽中的概率分别为 p_1, p_2, p_3, 则 ( )

(A) $p_1=p_2<p_3$ (B) $p_2=p_3<p_1$ (C) $p_1=p_3<p_2$ (D) $p_1=p_2=p_3$

3. 已知 $f(x), g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数, 且 $f(x)-g(x)=x^3+x^2+1$, 则 $f(1)+g(1)=$ ( )

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

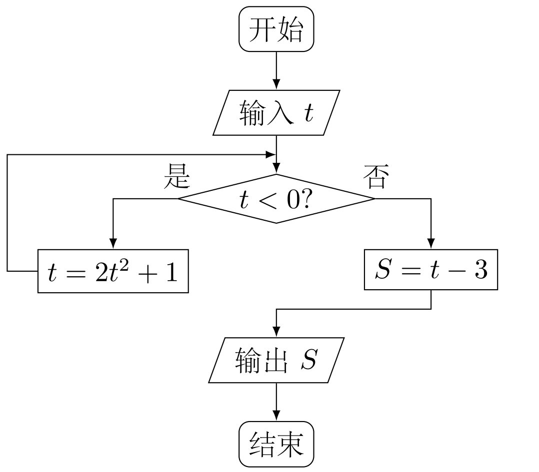
4. $\left(\frac{1}{2}x-2y\right)^5$ 的展开式中 x^2y^3 的系数是 ( )

(A) -20 (B) -5 (C) 5 (D) 20

5. 已知命题 p: 若 $x>y$, 则 $-x<-y$; 命题 q: 若 $x>y$, 则 $x^2>y^2$, 在命题 ① $p\wedge q$; ② $p\vee q$; ③ $p\wedge(\neg q)$; ④ $(\neg p)\vee q$ 中, 真命题是 ( )

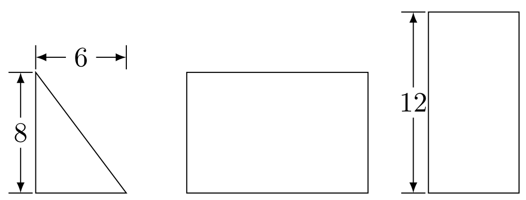
(A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

6. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 $t\in[-2,2]$, 则输出的 S 属于 ( )



(A) $[-6,-2]$ (B) $[-5,-1]$ (C) $[-4,5]$ (D) $[-3,6]$

7. 一块石材表示的几何体的三视图如图所示, 将该石材切削、打磨, 加工成球, 则能得到的最大球的半径等于 ( )



正视图 侧视图 俯视图

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

8. 某市生产总值连续两年持续增加. 第一年的增长率为 p, 第二年的增长率为 q, 则该市这两年生产总值的年平均增长率为 ( )

(A) $\dfrac{p+q}{2}$ (B) $\dfrac{(p+1)(q+1)-1}{2}$

(C) $\sqrt{pq}$ (D) $\sqrt{(p+1)(q+1)}-1$

9. 已知函数 $f(x)=\sin(x-\varphi)$, 且 $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴是 ( )

(A) $x=\frac{5\pi}{6}$ (B) $x=\frac{7\pi}{12}$ (C) $x=\frac{\pi}{3}$ (D) $x=\frac{\pi}{6}$

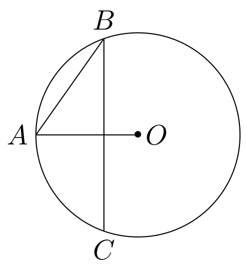
10. 已知函数 $f(x)=x^2+\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}$ $(x<0)$ 与 $g(x)=x^2+\ln(x+a)$ 的图象上存在关于 y 轴对称的点, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left(-\infty,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$ (B) $(-\infty,\sqrt{\mathrm{e}})$ (C) $\left(-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ (D) $\left(-\sqrt{\mathrm{e}},\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$

二、填空题

11. 在平面直角坐标系中, 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l 与曲线 C: $\begin{cases}x=2+\cos\alpha,\\ y=1+\sin\alpha,\end{cases}$ (α 为参数) 交于 A, B 两点, 且 $|AB|=2$, 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 则直线 l 的极坐标方程是______.

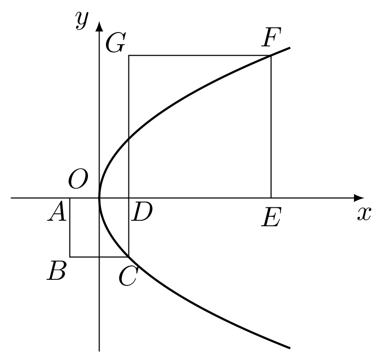
12. 如图, 已知 AB, BC 是 $\odot O$ 的两条弦, $AO\perp BC$, $AB=\sqrt{3}$, $BC=2\sqrt{2}$, 则 $\odot O$ 的半径等于______.



13. 若关于 x 的不等式 $|ax-2|<3$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{5}{3}<x<\frac{1}{3}\right\}$, 则 $a=$______.

14. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}y\leqslant x,\\ x+y\leqslant 4,\\ y\geqslant k,\end{cases}$ 且 $z=2x+y$ 的最小值为 -6, 则 $k=$______.

15. 如图, 正方形 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$ 的边长分别为 a, b $(a<b)$, 原点 O 为 AD 的中点, 抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 经过 C, F 两点, 则 $\frac{b}{a}=$______.



16. 在平面直角坐标系中, O 为原点, $A(-1,0)$, $B\left(0,\sqrt{3}\right)$, $C(3,0)$, 动点 D 满足 $\left|\overrightarrow{CD}\right|=1$, 则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|$ 的最大值是______.

三、解答题

17. 某企业有甲、乙两个研发小组, 他们研发新产品成功的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{5}$. 现安排甲组研发新产品 A, 乙组研发新产品 B. 设甲、乙两组的研发相互独立.

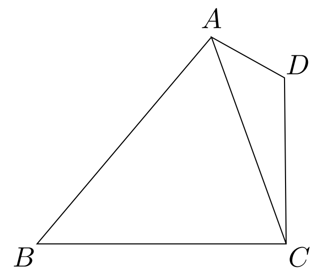
(1) 求至少有一种新产品研发成功的概率;

(2) 若新产品 A 研发成功, 预计企业可获利润 120 万元; 若新产品 B 研发成功, 预计企业可获利润 100 万元. 求该企业可获利润的分布列和数学期望.

18. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AD=1$, $CD=2$, $AC=\sqrt{7}$.

(1) 求 $\cos\angle CAD$ 的值;

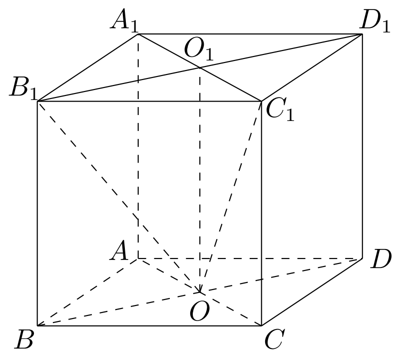
(2) 若 $\cos\angle BAD=-\frac{\sqrt{7}}{14}$, $\sin\angle CBA=\frac{\sqrt{21}}{6}$, 求 BC 的长.



19. 如图, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都相等, $AC\cap BD=O$, $A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$, 四边形 ACC_1A_1 和四边形 BDD_1B_1 均为矩形.

(1) 证明: $O_1O\perp$ 底面 $ABCD$;

(2) 若 $\angle CBA=60^\circ$, 求二面角 C_1-OB_1-D 的余弦值.



20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $|a_{n+1}-a_n|=p^n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

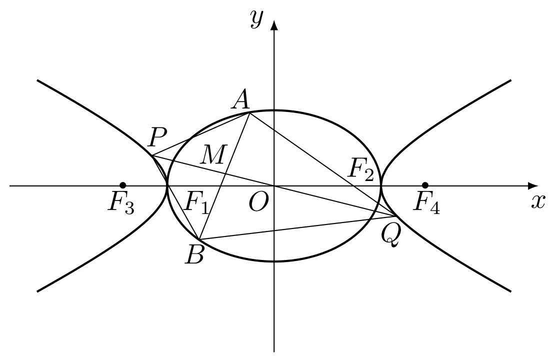
(1) 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且 a_1, $2a_2$, $3a_3$ 成等差数列, 求 p 的值;

(2) 若 $p=\dfrac{1}{2}$, 且 $\{a_{2n-1}\}$ 是递增数列, $\{a_{2n}\}$ 是递减数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

21. 如图, O 为坐标原点, 椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 离心率为 e_1; 双曲线 C_2: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_3、F_4, 离心率为 e_2. 已知 $e_1e_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $|F_2F_4|=\sqrt{3}-1$.

(1) 求 C_1, C_2 的方程;

(2) 过 F_1 作 C_1 的不垂直于 y 轴的弦 AB, M 为弦 AB 的中点. 当直线 OM 与 C_2 交于 P, Q 两点时, 求四边形 $APBQ$ 面积的最小值.



22. 已知常数 $a>0$, 函数 $f(x)=\ln(1+ax)-\dfrac{2x}{x+2}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2, 且 $f(x_1)+f(x_2)>0$, 求 a 的取值范围.