2014 普通高等学校招生考试 (辽宁卷文)

一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x\,|\,x\leqslant 0\}$, $B=\{x\,|\,x\geqslant 1\}$, 则集合 $\complement_U(A\cup B)=$ ( )

(A) $\{x\,|\,x\geqslant 0\}$ (B) $\{x\,|\,x\leqslant 1\}$
(C) $\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}$ (D) $\{x\,|\,0<x<1\}$

2. 设复数 z 满足 $(z-2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$, 则 $z=$ ( )

(A) $2+3\mathrm{i}$ (B) $2-3\mathrm{i}$ (C) $3+2\mathrm{i}$ (D) $3-2\mathrm{i}$

3. 已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$, $b=\log_2\dfrac{1}{3}$, $c=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$, 则 ( )

(A) $a>b>c$ (B) $a>c>b$ (C) $c>a>b$ (D) $c>b>a$

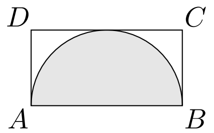
4. 已知 m, n 表示两条不同直线, α 表示平面, 下列说法正确的是 ( )

(A) 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$ (B) 若 $m\perp\alpha$, $n\subset\alpha$, 则 $m\perp n$
(C) 若 $m\perp\alpha$, $m\perp n$, 则 $n\parallel\alpha$ (D) 若 $m\parallel\alpha$, $m\perp n$, 则 $n\perp\alpha$

5. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是非零向量, 已知命题 p: 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$; 命题 q: 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$, 则下列命题中的真命题是 ( )

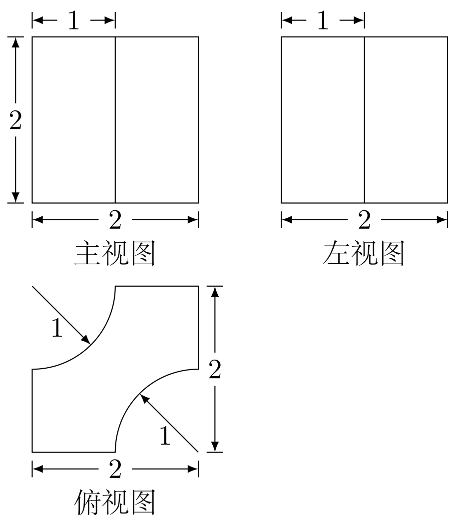
(A) $p\vee q$ (B) $p\wedge q$ (C) $(\neg p)\wedge(\neg q)$ (D) $p\vee(\neg q)$

6. 若将一个质点随机投入如图所示的长方形 $ABCD$ 中, 其中 $AB=2$, $BC=1$, 则质点落在以 AB 为直径的半圆内的概率是 ( )



(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{6}$ (D) $\dfrac{\pi}{8}$

7. 某几何体三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )



(A) $8-\dfrac{\pi}{4}$ (B) $8-\dfrac{\pi}{2}$ (C) $8-\pi$ (D) $8-2\pi$

8. 已知点 $A(-2,3)$ 在抛物线 C: $y^2=2px$ 的准线上, 记 C 的焦点为 F, 则直线 AF 的斜率为 ( )

(A) $-\dfrac{4}{3}$ (B) -1 (C) $-\dfrac{3}{4}$ (D) $-\dfrac{1}{2}$

9. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 若数列 $\{2^{a_1a_n}\}$ 为递减数列, 则 ( )

(A) $d<0$ (B) $d>0$ (C) $a_1d>0$ (D) $a_1d<0$

10. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=\begin{cases}\cos\pi x, & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right],\\ 2x-1, & x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right),\end{cases}$ 则不等式 $f(x-1)\leqslant\dfrac{1}{2}$ 的解集为 ( )

(A) $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{4}\right]$ (B) $\left[-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3}\right]$
(C) $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{4}\right]\cup\left[\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{4}\right]$ (D) $\left[-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{4}\right]$

11. 将函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数 ( )

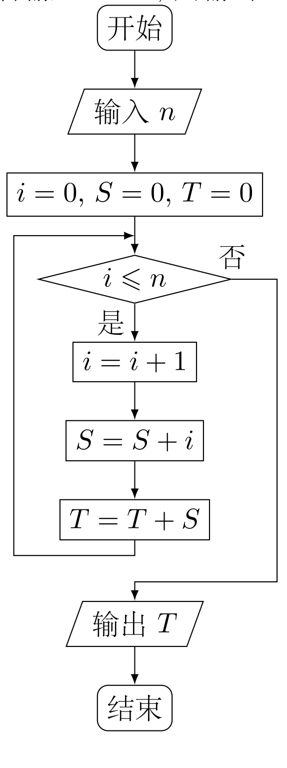
(A) 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减 (B) 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递增
(C) 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减 (D) 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增

12. 当 $x\in[-2,1]$ 时, 不等式 $ax^3-x^2+4x+3\geqslant 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $[-5,-3]$ (B) $\left[-6,-\dfrac{9}{8}\right]$ (C) $[-6,-2]$ (D) $[-4,-3]$

二、填空题

13. 执行如图的程序框图, 若输入 $n=3$, 则输出 $T=$______.



14. 已知 x, y 满足条件 $\begin{cases}2x+y-2\geqslant 0,\\ x-2y+4\geqslant 0,\\ 3x-y-3\leqslant 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=3x+4y$ 的最大值为______.

15. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, 点 M 与 C 的焦点不重合, 若 M 关于 C 的焦点的对称点分别为 A, B, 线段 MN 的中点在 C 上, 则 $|AN|+|BN|=$______.

16. 对于 $c>0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2-2ab+b^2-c=0$ 且使 $|2a+b|$ 最大时, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{4}{c}$ 的最小值为______.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $a>c$, 已知 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2$, $\cos B=\dfrac{1}{3}$, $b=3$, 求:

(1) a 和 c 的值;
(2) $\cos(B-C)$ 的值.

18. 某大学餐饮中心为了了解新生的饮食习惯, 在全校一年级学生中进行了抽样调查, 调查结果如下表所示:

	喜欢甜品	不喜欢甜品	合计
南方学生	60	20	80
北方学生	10	10	20
合计	70	30	100

(1) 根据表中数据, 问是否有 95% 的把握认为"南方学生和北方学生在选用甜品的饮食习惯方面有差异";
(2) 已知在被调查的北方学生中有 5 名数学系的学生, 其中 2 名喜欢甜品, 现在从这 5 名学生中随机抽取 3 人, 求至多有 1 人喜欢甜品的概率.

附: $\chi^2=\dfrac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$,

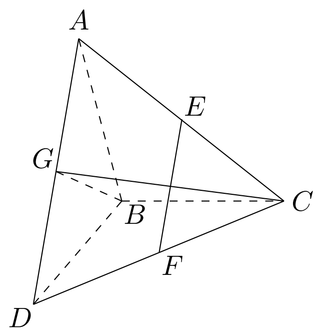
$P(\chi^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

19. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 所在平面互相垂直, 且 $AB=BC=BD=2$, $\angle ABC=\angle DBC=120^\circ$, E, F, G 分别为 AC, DC, AD 的中点.

(1) 求证: $EF\perp$ 平面 BCG;

(2) 求三棱锥 $D-BCG$ 的体积.

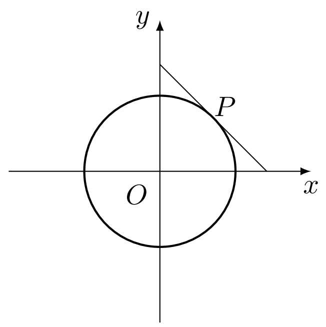
附: 锥体的体积公式 $V=\dfrac{1}{3}Sh$, 其中 S 为底面面积, h 为高.



20. 圆 $x^2+y^2=4$ 的切线与 x 轴正半轴, y 轴正半轴围成一个三角形, 当该三角形面积最小时, 切点为 P (如图).

(1) 求点 P 的坐标;

(2) 焦点在 x 轴上的椭圆 C 过点 P, 且与直线 l: $y=x+\sqrt{3}$ 交于 A, B 两点, 若 $\triangle PAB$ 的面积为 2, 求 C 的标准方程.



21. 已知函数 $f(x)=\pi(x-\cos x)-2\sin x-2$, $g(x)=(x-\pi)\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}+\dfrac{2x}{\pi}-1$.

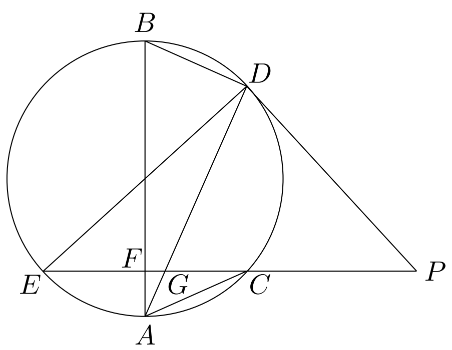
(1) 证明: 存在唯一 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使 $f(x_0)=0$;

(2) 证明: 存在唯一 $x_1\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 使 $g(x_1)=0$, 且对 (1) 中的 x_0, 有 $x_0+x_1>\pi$.

22. 如图, EP 交圆于 E, C 两点, PD 切圆于 D, G 为 CE 上一点且 $PG=PD$, 连接 DG 并延长交圆于点 A, 作弦 AB 垂直 EP, 垂足为 F.

(1) 求证: AB 为圆的直径;

(2) 若 $AC=BD$, 求证: $AB=ED$.



23. 将圆 $x^2+y^2=1$ 上每一点的横坐标保持不变, 纵坐标变为原来的 2 倍, 得曲线 C.

(1) 写出 C 的参数方程;

(2) 设直线 l: $2x+y-2=0$ 与 C 的交点为 P_1, P_2, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求过线段 P_1P_2 的中点且与 l 垂直的直线的极坐标方程.

24. 设函数 $f(x)=2|x-1|+x-1$, $g(x)=16x^2-8x+1$, 记 $f(x)\leqslant 1$ 的解集为 M, $g(x)\leqslant 4$ 的解集为 N.

(1) 求 M;

(2) 当 $x\in M\cap N$ 时, 证明: $x^2f(x)+x[f(x)]^2\leqslant\dfrac{1}{4}$.