2014 普通高等学校招生考试 (辽宁卷理)

一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x\,|\,x\leqslant 0\}$, $B=\{x\,|\,x\geqslant 1\}$, 则集合 $\complement_U(A\cup B)=$ ( )

(A) $\{x\,|\,x\geqslant 0\}$　(B) $\{x\,|\,x\leqslant 1\}$

(C) $\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}$　(D) $\{x\,|\,0<x<1\}$

2. 设复数 z 满足 $(z-2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$, 则 $z=$ ( )

(A) $2+3\mathrm{i}$　(B) $2-3\mathrm{i}$　(C) $3+2\mathrm{i}$　(D) $3-2\mathrm{i}$

3. 已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$, $b=\log_2\dfrac{1}{3}$, $c=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$, 则 ( )

(A) $a>b>c$　(B) $a>c>b$　(C) $c>a>b$　(D) $c>b>a$

4. 已知 m, n 表示两条不同直线, α 表示平面, 下列说法正确的是 ( )

(A) 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$　(B) 若 $m\perp\alpha$, $n\subset\alpha$, 则 $m\perp n$

(C) 若 $m\perp\alpha$, $m\perp n$, 则 $n\parallel\alpha$　(D) 若 $m\parallel\alpha$, $m\perp n$, 则 $n\perp\alpha$

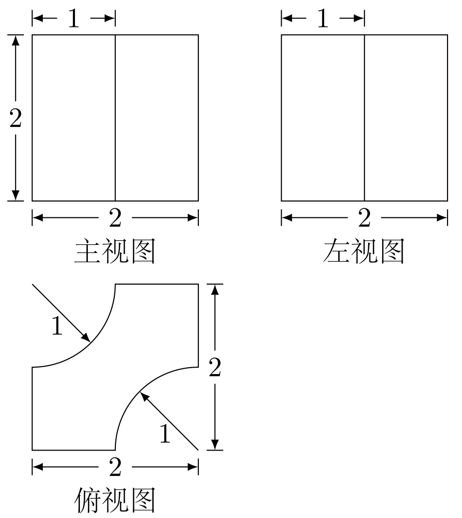
5. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是非零向量, 已知命题 p: 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$; 命题 q: 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$, 则下列命题中的真命题是 ( )

(A) $p\vee q$　(B) $p\wedge q$　(C) $(\neg p)\wedge(\neg q)$　(D) $p\vee(\neg q)$

6. 6 把椅子摆成一排, 3 人随机就座, 任何两人不相邻的坐法种数为 ( )

(A) 144　(B) 120　(C) 72　(D) 24

7. 某几何体三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )



(A) $8-2\pi$　(B) $8-\pi$　(C) $8-\dfrac{\pi}{2}$　(D) $8-\dfrac{\pi}{4}$

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 若数列 $\{2^{a_1a_n}\}$ 为递减数列, 则 ( )

(A) $d<0$　(B) $d>0$　(C) $a_1d>0$　(D) $a_1d<0$

9. 将函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数 ( )

(A) 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减　(B) 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递增

(C) 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减　(D) 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增

10. 已知点 $A(-2,3)$ 在抛物线 C: $y^2=2px$ 的准线上, 过点 A 的直线与 C 在第一象限相切于点 B, 记 C 的焦点为 F, 则直线 BF 的斜率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{4}{3}$

11. 当 $x\in[-2,1]$ 时, 不等式 $ax^3-x^2+4x+3\geqslant 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ( )

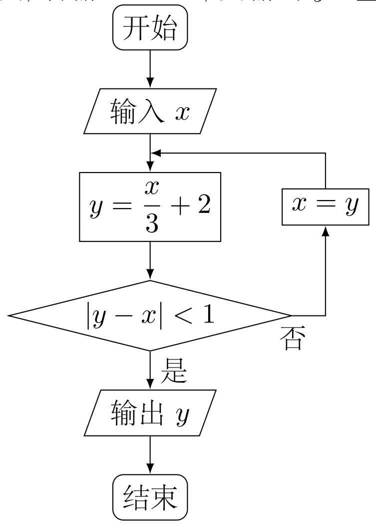
(A) $[-5,-3]$　(B) $\left[-6,-\dfrac{9}{8}\right]$　(C) $[-6,-2]$　(D) $[-4,-3]$

12. 已知定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足: ① $f(0)=f(1)=0$; ② 对所有 x, $y\in[0,1]$, 且 $x\neq y$, 有 $|f(x)-f(y)|<\dfrac{1}{2}|x-y|$. 若对所有 x, $y\in[0,1]$, $|f(x)-f(y)|<k$ 恒成立, 则 k 的最小值为 ( )

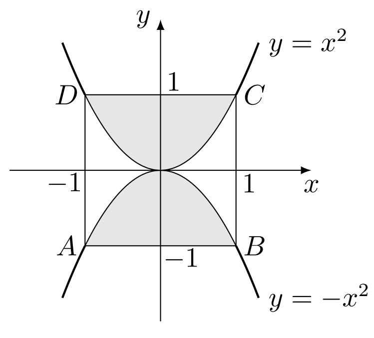
(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{2\pi}$　(D) $\dfrac{1}{8}$

二、填空题

13. 执行如图的程序框图, 若输入 $x=9$, 则输出 $y=$______.



14. 正方形的四个顶点 $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$ 分别在抛物线 $y=-x^2$ 和 $y=x^2$ 上, 如图所示, 若将一个质点随机投入正方形 $ABCD$ 中, 则质点落在阴影区域的概率是______.



15. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, 点 M 与 C 的焦点不重合, 若 M 关于 C 的焦点的对称点分别为 A, B, 线段 MN 的中点在 C 上, 则 $|AN|+|BN|=$______.

16. 对于 $c>0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2-2ab+4b^2-c=0$ 且使 $|2a+b|$ 最大时, $\dfrac{3}{a}-\dfrac{4}{b}+\dfrac{5}{c}$ 的最小值为______.

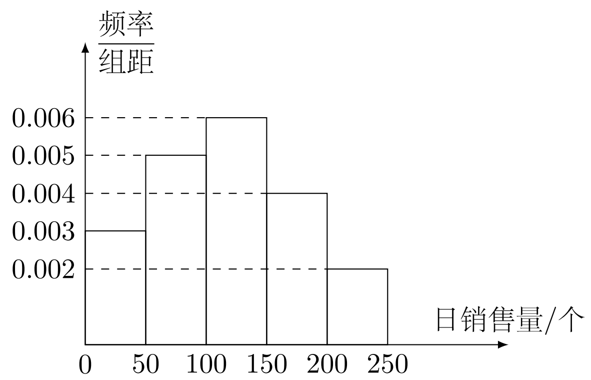
三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $a>c$, 已知 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2$, $\cos B=\dfrac{1}{3}$, $b=3$, 求:

(1) a 和 c 的值;

(2) $\cos(B-C)$ 的值.

18. 一家面包房根据以往某种面包的销售记录, 绘制了日销售量的频率分布直方图, 如图所示. 将日销售量落入各组的频率视为概率, 并假设每天的销售量相互独立.



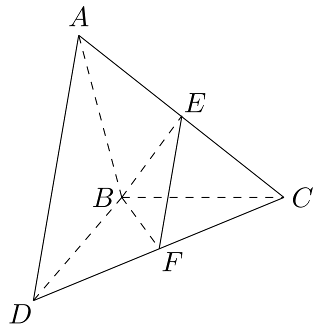
(1) 求在未来连续 3 天里, 有连续 2 天的日销售量都不低于 100 个且另 1 天的日销售量低于 50 个的概率;

(2) 用 X 表示在未来 3 天里日销售量不低于 100 个的天数, 求随机变量 X 的分布列, 期望 $E(X)$ 及方差 $D(X)$.

19. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 所在平面互相垂直, 且 $AB=BC=BD=2$, $\angle ABC=\angle DBC=120^\circ$, E, F 分别为 AC, DC 的中点.

(1) 求证: $EF\perp BC$;

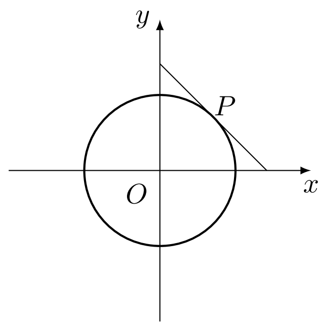
(2) 求二面角 $E-BF-C$ 的正弦值



20. 圆 $x^2+y^2=4$ 的切线与 x 轴正半轴, y 轴正半轴围成一个三角形, 当该三角形面积最小时, 切点为 P (如图). 双曲线 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 P 且离心率为 $\sqrt{3}$.

(1) 求 C_1 的方程;

(2) 椭圆 C_2 过点 P 且与 C_1 有相同的焦点, 直线 l 过 C_2 的右焦点且与 C_2 交于 A, B 两点, 若以线段 AB 为直径的圆过点 P, 求 l 的方程.



21. 已知函数 $f(x)=(\cos x-x)(\pi+2x)-\dfrac{8}{3}(\sin x+1)$, $g(x)=3(x-\pi)\cos x-4(1+\sin x)\ln\left(3-\dfrac{2x}{\pi}\right)$.

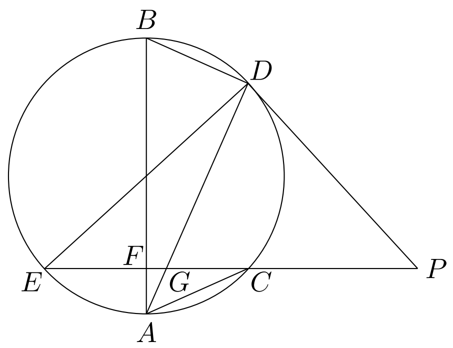
(1) 证明: 存在唯一 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使 $f\left(x_0\right)=0$;

(2) 证明: 存在唯一 $x_1\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 使 $g\left(x_1\right)=0$, 且对 (1) 中的 x_0, 有 $x_0+x_1<\pi$.

22. 如图, EP 交圆于 E, C 两点, PD 切圆于 D, G 为 CE 上一点且 $PG=PD$, 连接 DG 并延长交圆于点 A, 作弦 AB 垂直 EP, 垂足为 F.

(1) 求证: AB 为圆的直径;

(2) 若 $AC=BD$, 求证: $AB=ED$.



23. 将圆 $x^2+y^2=1$ 上每一点的横坐标保持不变, 纵坐标变为原来的 2 倍, 得曲线 C.

(1) 写出 C 的参数方程;

(2) 设直线 l: $2x+y-2=0$ 与 C 的交点为 P_1, P_2, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求过线段 P_1P_2 的中点且与 l 垂直的直线的极坐标方程.

24. 设函数 $f(x)=2|x-1|+x-1$, $g(x)=16x^2-8x+1$, 记 $f(x)\leqslant 1$ 的解集为 M, $g(x)\leqslant 4$ 的解集为 N.

(1) 求 M;

(2) 当 $x\in M\cap N$ 时, 证明: $x^2f(x)+x[f(x)]^2\leqslant\dfrac{1}{4}$.