2015 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

一、填空题

1. 函数 $f(x)=1-3\sin^2 x$ 的最小正周期为______.
2. 设全集 $U=\mathbf{R}$. 若集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$, 则 $A\cap \complement_U B=$______.
3. 若复数 z 满足 $3z+\overline{z}=1+\mathrm{i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z=$______.
4. 设 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$ 的反函数, 则 $f^{-1}(2)=$______.
5. 若线性方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix}2 & 3 & c_1\\ 0 & 1 & c_2\end{pmatrix}$、解为 $\begin{cases}x=3,\\ y=5,\end{cases}$ 则 $c_1-c_2=$______.
6. 若正三棱柱的所有棱长均为 a, 且其体积为 $16\sqrt{3}$, 则 $a=$______.
7. 抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上的动点 Q 到焦点的距离的最小值为 1, 则 $p=$______.
8. 方程 $\log_2(9^{x-1}-5)=\log_2(3^{x-1}-2)+2$ 的解为______.
9. 若 x, y 满足 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y\leqslant 2,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则目标函数 $f=x+2y$ 的最大值为______.
10. 在报名的 3 名男教师和 6 名女教师中, 选取 5 人参加义务献血, 要求男、女教师都有, 则不同的选取方式的种数为______. (结果用数值表示)
11. 在 $\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^6$ 的二项展开式中, 常数项等于______. (结果用数值表示)
12. 已知双曲线 C_1, C_2 的顶点重合, C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$, 若 C_2 的一条渐近线的斜率是 C_1 的一条渐近线的斜率的 2 倍, 则 C_2 的方程为______.
13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 且 $\{|\boldsymbol{a}|,\ |\boldsymbol{b}|,\ |\boldsymbol{c}|\}=\{1,\ 2,\ 3\}$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 的最大值是______.
14. 已知函数 $f(x)=\sin x$. 若存在 x_1, x_2, $\cdots$, x_m 满足 $0\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_m\leqslant 6\pi$. 且 $|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(x_3)|+\cdots+|f(x_{m-1})-f(x_m)|=12\ (m\geqslant 2,\ m\in\mathbf{N}^*)$, 则 m 的最小值为______.

二、选择题

15. 设 z_1, $z_2\in\mathbf{C}$, 则“z_1, z_2 均为实数”是“z_1-z_2 是实数”的 ( )

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件
(C) 充要条件　(D) 既非充分又非必要条件

16. 下列不等式中, 与不等式 $\dfrac{x+8}{x^2+2x+3}<2$ 解集相同的是 ( )

(A) $(x+8)(x^2+2x+3)<2$　(B) $x+8<2(x^2+2x+3)$
(C) $\dfrac{1}{x^2+2x+3}<\dfrac{2}{x+8}$　(D) $\dfrac{x^2+2x+3}{x+8}>\dfrac{1}{2}$

17. 已知点 A 的坐标为 $(4\sqrt{3},1)$, 将 OA 绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 至 OB, 则点 B 的纵坐标为 ( )

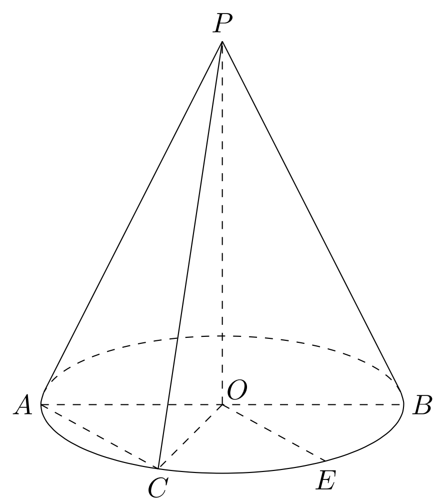
(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$　(C) $\dfrac{11}{2}$　(D) $\dfrac{13}{2}$

18. 设 $P_n(x_n,y_n)$ 是直线 $2x-y=\dfrac{n}{n+1}\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 在第一象限的交点, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-1}{x_n-1}=$ ( )

(A) -1　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2

三、解答题

19. 如图, 圆锥的顶点为 P, 底面圆心为 O, 底面的一条直径为 AB, C 为半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点, E 为劣弧 $\overset{\frown}{CB}$ 的中点, 已知 $PO=2$, $OA=1$, 求三棱锥 $P-AOC$ 的体积, 并求异面直线 PA 与 OE 所成角的余弦值.



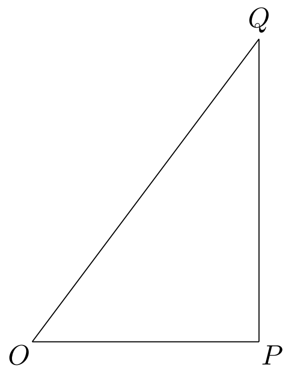
20. 已知函数 $f(x)=ax^2+\dfrac{1}{x}$, 其中 a 为常数.

(1) 根据 a 的不同取值, 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;
(2) 若 $a\in(1,3)$, 判断函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的单调性, 并说明理由.

21. 如图, O, P, Q 三地有直道相通, $OP=3$ 千米, $PQ=4$ 千米, $OQ=5$ 千米. 现甲、乙两警员同时从 O 地出发匀速前往 Q 地, 经过 t 小时, 他们之间的距离为 $f(t)$ (单位: 千米). 甲的路线是 OQ, 速度为 5 千米/小时, 乙的路线是 OPQ, 速度为 8 千米/小时. 乙到达 Q 地后在原地等待. 设 $t=t_1$ 时, 乙到达 P 地; $t=t_2$ 时, 乙到达 Q 地.

(1) 求 t_1 与 $f(t_1)$ 的值;

(2) 已知警员的对讲机的有效通话距离是 3 千米. 当 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 时, 求 $f(t)$ 的表达式, 并判断 $f(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 上的最大值是否超过 3? 说明理由.



22. 已知椭圆 $x^2+2y^2=1$, 过原点的两条直线 l_1 和 l_2 分别与椭圆交于点 A, B 和 C, D. 记 $\triangle AOC$ 的面积为 S.

(1) 设 $A(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$. 用 A, C 的坐标表示点 C 到直线 l_1 的距离, 并证明 $S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$;

(2) 设 l_1: $y=kx$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $S=\frac{1}{3}$, 求 k 的值.

(3) 设 l_1 与 l_2 的斜率之积为 m, 求 m 的值, 使得无论 l_1 与 l_2 如何变动, 面积 S 保持不变.

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $b_n=3n+5$, 且 $a_1=1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\{a_n\}$ 的第 n_0 项是最大项, 即 $a_{n_0}\geqslant a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 求证: $\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项;

(3) 设 $a_1=3\lambda<0$, $b_n=\lambda^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 求 λ 的取值范围, 使得对任意 m, $n\in\mathbf{N}^*$, $a_n\neq0$, 且 $\frac{a_m}{a_n}\in\left(\frac{1}{6},6\right)$.