2015 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$. 若集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$, 则 $A\cap \complement_U B=$______.

2. 若复数 z 满足 $3z+\bar{z}=1+\mathrm{i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z=$______.

3. 若线性方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix}2 & 3 & c_1\\ 0 & 1 & c_2\end{pmatrix}$、解为 $\begin{cases}x=3,\\ y=5,\end{cases}$ 则 $c_1-c_2=$______.

4. 若正三棱柱的所有棱长均为 a, 且其体积为 $16\sqrt{3}$, 则 $a=$______.

5. 抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上的动点 Q 到焦点的距离的最小值为 1, 则 $p=$______.

6. 若圆锥的侧面积与过轴的截面面积之比为 2π, 则其母线与轴的夹角的大小为______.

7. 方程 $\log_2(9^{x-1}-5)=\log_2(3^{x-1}-2)+2$ 的解为______.

8. 在报名的 3 名男教师和 6 名女教师中, 选取 5 人参加义务献血, 要求男、女教师都有, 则不同的选取方式的种数为______. (结果用数值表示)

9. 已知点 P 和 Q 的横坐标相同, P 的纵坐标是 Q 的纵坐标的 2 倍, P 和 Q 的轨迹分别为双曲线 C_1 和 C_2. 若 C_1 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$, 则 C_2 的渐近线方程为______.

10. 设 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)=2^{x-2}+\dfrac{x}{2}$, $x\in[0,2]$ 的反函数, 则 $y=f(x)+f^{-1}(x)$ 的最大值为______.

11. 在 $\left(1+x+\dfrac{1}{x^{2015}}\right)^{10}$ 的展开式中, x^2 项的系数为______. (结果用数值表示)

12. 赌博有陷阱. 某种赌博每局的规则是: 赌客先在标记有 1, 2, 3, 4, 5 的卡片中随机摸取一张, 将卡片上的数字作为其赌金 (单位: 元); 随后放回该卡片, 再随机摸取两张, 将这两张卡片上数字之差的绝对值的 1.4 倍作为其奖金 (单位: 元). 若随机变量 ξ_1 和 ξ_2 分别表示赌客在一局赌博中的赌金和奖金, 则 $E\xi_1-E\xi_2=$______(元).

13. 已知函数 $f(x)=\sin x$. 若存在 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 满足 $0\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_m\leqslant 6\pi$. 且 $|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(x_3)|+\cdots+|f(x_{m-1})-f(x_m)|=12\ (m\geqslant 2, m\in\mathbf{N}^*)$, 则 m 的最小值为______.

14. 在锐角三角形 ABC 中, $\tan A=\dfrac{1}{2}$, D 为边 BC 上的点, $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的面积分别为 2 和 4. 过 D 作 $DE\perp AB$ 于 E, $DF\perp AC$ 于 F, 则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=$______.

二、选择题

15. 设 $z_1, z_2\in\mathbf{C}$, 则“z_1, z_2 中至少有一个数是虚数”是“z_1-z_2 是虚数”的 (　)

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件
(C) 充要条件　(D) 既非充分又非必要条件

16. 已知点 A 的坐标为 $(4\sqrt{3},1)$, 将 OA 绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 至 OB, 则点 B 的纵坐标为 (　)

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$　(C) $\dfrac{11}{2}$　(D) $\dfrac{13}{2}$

17. 记方程①: $x^2+a_1x+1=0$, 方程②: $x^2+a_2x+2=0$, 方程③: $x^2+a_3x+4=0$, 其中 a_1, a_2, a_3 是正实数. 当 a_1, a_2, a_3 成等比数列时, 下列选项中, 能推出方程③无实根的是 (　)

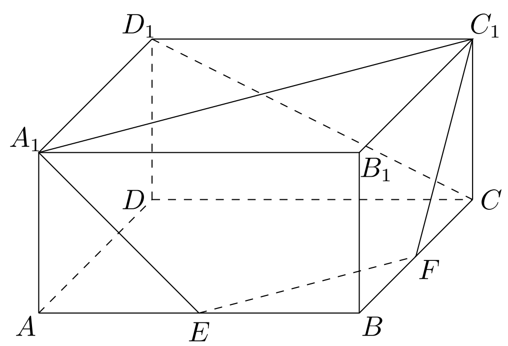
(A) 方程①有实根, 且②有实根　(B) 方程①有实根, 且②无实根
(C) 方程①无实根, 且②有实根　(D) 方程①无实根, 且②无实根

18. 设 $P_n(x_n,y_n)$ 是直线 $2x-y=\dfrac{n}{n+1}\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 在第一象限的交点, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-1}{x_n-1}=$ (　)

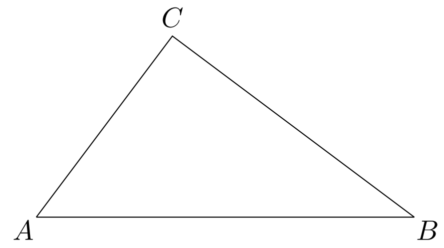
(A) -1　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2

三、解答题

19. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=1$, $AB=AD=2$, E, F 分别是棱 AB, BC 的中点. 证明 A_1, C_1, F, E 四点共面, 并求直线 CD_1 与平面 A_1C_1FE 所成角的正弦值.



20. 如图, A, B, C 三地有直道相通, $AB=5$ 千米, $AC=3$ 千米, $BC=4$ 千米. 现甲、乙两警员同时从 A 地出发匀速前往 B 地, 过 t 小时, 他们之间的距离为 $f(t)$ (单位: 千米). 甲的路线是 AB, 速度为 5 千米/小时, 乙的路线是 ACB, 速度为 8 千米/小时. 乙到达 B 地后在原地等待. 设 $t=t_1$ 时, 乙到达 C 地.
(1) 求 t_1 与 $f(t_1)$ 的值;
(2) 已知警员的对讲机的有效通话距离是 3 千米. 当 $t_1\leqslant t\leqslant 1$ 时, 求 $f(t)$ 的表达式, 并判断 $f(t)$ 在 $[t_1,1]$ 上的最大值是否超过 3? 说明理由.



21. 已知椭圆 $x^2+2y^2=1$, 过原点的两条直线 l_1 和 l_2 分别与椭圆交于点 A, B 和 C, D. 记得到的平行四边形 $ACBD$ 的面积为 S.

(1) 设 $A(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$. 用 A, C 的坐标表示点 C 到直线 l_1 的距离, 并证明 $S=2|x_1y_2-x_2y_1|$;

(2) 设 l_1 与 l_2 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$, 求面积 S 的值.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $b_n=3n+5$, 且 $a_1=1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\{a_n\}$ 的第 n_0 项是最大项, 即 $a_{n_0}\geqslant a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 求证: $\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项;

(3) 设 $a_1=\lambda<0$, $b_n=\lambda^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 求 λ 的取值范围, 使得 $\{a_n\}$ 有最大值 M 与最小值 m, 且 $\dfrac{M}{m}\in(-2,2)$.

23. 对于定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $g(x)$, 若存在正常数 T, 使得 $\cos g(x)$ 是以 T 为周期的函数, 则称 $g(x)$ 为余弦周期函数, 且称 T 为其余弦周期. 已知 $f(x)$ 是以 T 为余弦周期的余弦周期函数, 其值域为 $\mathbf{R}$. 设 $f(x)$ 单调递增, $f(0)=0$, $f(T)=4\pi$.

(1) 验证 $h(x)=x+\sin\dfrac{x}{3}$ 是以 6π 为余弦周期的余弦周期函数;

(2) 设 $a<b$, 证明对任意 $c\in[f(a),f(b)]$, 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=c$;

(3) 证明: "u_0 为方程 $\cos f(x)=1$ 在 $[0,T]$ 上的解"的充要条件是"u_0+T 为方程 $\cos f(x)=1$ 在 $[T,2T]$ 上的解", 并证明对任意 $x\in[0,T]$ 都有 $f(x+T)=f(x)+f(T)$.