2015 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x=3n+2,\ n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$, 则集合 $A\cap B$ 中的元素个数为 ( )

(A) 5　　(B) 4　　(C) 3　　(D) 2

2. 已知点 $A(0,1)$, $B(3,2)$, 向量 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$, 则向量 $\overrightarrow{BC}=$ ( )

(A) $(-7,-4)$　　(B) $(7,4)$　　(C) $(-1,4)$　　(D) $(1,4)$

3. 已知复数 z 满足 $(z-1)\,\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$, 则 $z=$ ( )

(A) $-2-\mathrm{i}$　　(B) $-2+\mathrm{i}$　　(C) $2-\mathrm{i}$　　(D) $2+\mathrm{i}$

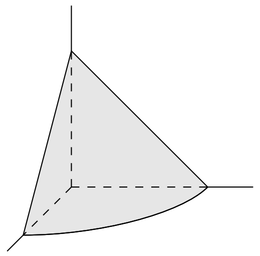
4. 如果 3 个正整数可作为一个直角三角形三条边的边长, 则称这 3 个数为一组勾股数, 从 1, 2, 3, 4, 5 中任取 3 个不同的数, 则这 3 个数构成一组勾股数的概率为 ( )

(A) $\dfrac{3}{10}$　　(B) $\dfrac{1}{5}$　　(C) $\dfrac{1}{10}$　　(D) $\dfrac{1}{20}$

5. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$, E 的右焦点与抛物线 C: $y^2=8x$ 的焦点重合, A, B 是 C 的准线与 E 的两个交点, 则 $|AB|=$ ( )

(A) 3　　(B) 6　　(C) 9　　(D) 12

6. 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: "今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺. 问: 积及为米几何? "其意思为: "在屋内墙角处堆放米 (如图, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为 8 尺, 米堆的高为 5 尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少? "已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺, 圆周率约为 3, 估算出堆放的米约有 ( )

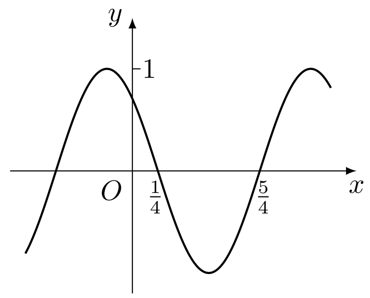


(A) 14 斛　　(B) 22 斛　　(C) 36 斛　　(D) 66 斛

7. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_8=4S_4$, 则 $a_{10}=$ ( )

(A) $\dfrac{17}{2}$　　(B) $\dfrac{19}{2}$　　(C) 10　　(D) 12

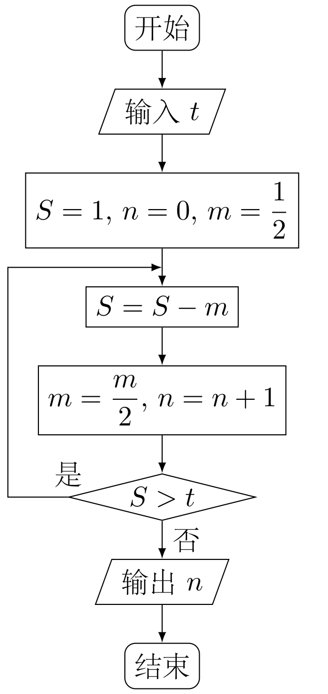
8. 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 ( )



(A) $\left(k\pi-\dfrac{1}{4},k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$　　(B) $\left(2k\pi-\dfrac{1}{4},2k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

(C) $\left(k-\dfrac{1}{4},k+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$　　(D) $\left(2k-\dfrac{1}{4},2k+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

9. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $t=0.01$, 则输出的 $n=$ ( )

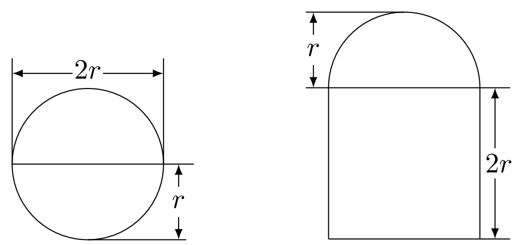


(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-2, & x\leqslant 1,\\ -\log_2(x+1), & x>1,\end{cases}$ 且 $f(a)=-3$, 则 $f(6-a)=$ ( )

(A) $-\dfrac{7}{4}$　　(B) $-\dfrac{5}{4}$　　(C) $-\dfrac{3}{4}$　　(D) $-\dfrac{1}{4}$

11. 圆柱被一个平面截去一部分后与半球 (半径为 r) 组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为 $16+20\pi$, 则 $r=$ ( )



正视图　　俯视图

(A) 1　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 8

12. 设函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=2^{x+a}$ 的图象关于直线 $y=-x$ 对称, 且 $f(-2)+f(-4)=1$, 则 $a=$ ( )

(A) -1　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 4

二、填空题

13. 数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n=126$, 则 $n=$______.

14. 已知函数 $f(x)=ax^3+x+1$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线过点 $(2,7)$, 则 $a=$______.

15. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0,\\ x-2y+1\leqslant 0,\\ 2x-y+2\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3x+y$ 的最大值为______.

16. 已知 F 是双曲线 C: $x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$ 的右焦点, P 是 C 左支上一点, $A\left(0,6\sqrt{6}\right)$, 当 $\triangle APF$ 周长最小时, 该三角形的面积为______.

三、解答题

17. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边, $\sin^2 B=2\sin A\sin C$.

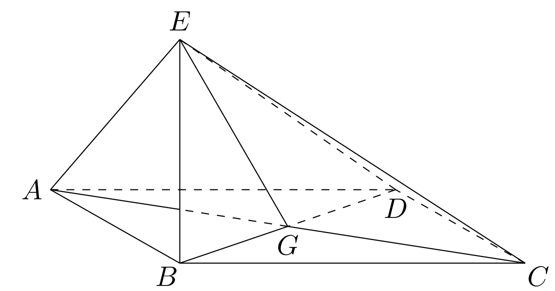
(1) 若 $a=b$, 求 $\cos B$;

(2) 若 $B=90^\circ$, 且 $a=\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

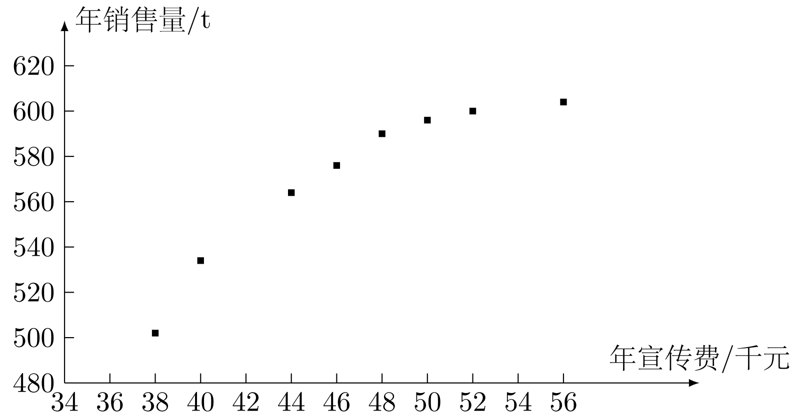
18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, G 为 AC 与 BD 的交点, $BE\perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 证明: 平面 $AEC\perp$ 平面 BED;

(2) 若 $\angle ABC=120^\circ$, $AE\perp EC$, 三棱锥 $E-ACD$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 求该三棱锥的侧面积.



19. 某公司为确定下一年度投入某产品的宣传费, 需了解年宣传费 x (单位: 千元) 对年销售量 y (单位: t) 和年利润 z (单位: 千元) 的影响. 对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$ 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{w}$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})^2$
46.6	563	6.8	289.8	1.6

$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})(y_i-\overline{y})$
1.469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}$, $\overline{w}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}w_i$.

(1) 根据散点图判断, $y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)

(2) 根据 (1) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(3) 已知这种产品的年利润 z 与 x, y 的关系为 $z=0.2y-x$. 根据 (2) 的结果回答下列问题:

① 年宣传费 $x=49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?

② 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$, 其回归直线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$, $\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$.

20. 已知过点 $A(0,1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 C: $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 M, N 两点.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$, 其中 O 为坐标原点, 求 $|MN|$.

21. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-a\ln x$.

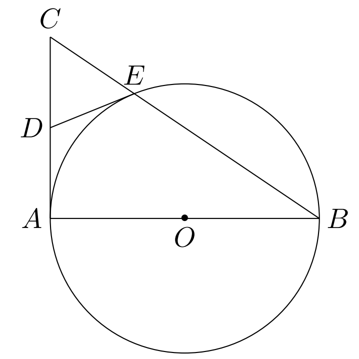
(1) 讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的零点的个数;

(2) 证明: 当 $a>0$ 时, $f(x)\geqslant 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$.

22. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的切线, BC 交 $\odot O$ 于点 E.

(1) 若 D 为 AC 的中点, 证明: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $OA=\sqrt{3}CE$, 求 $\angle ACB$ 的大小.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 C_1: $x=-2$, 圆 C_2: $(x-1)^2+(y-2)^2=1$, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求 C_1, C_2 的极坐标方程;

(2) 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ $(\rho\in\mathbf{R})$, 设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N, 求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

24. 已知函数 $f(x)=|x+1|-2|x-a|$, $a>0$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)>1$ 的解集;

(2) 若 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积大于 6, 求 a 的取值范围.